Conmutatividad en grupos de Lie

Omar Antolín Camarena (IMATE UNAM - CDMX)

n-adas que conmutan en un grupo de Lie

- A lo largo de la plática, G es un grupo de Lie.
- El espacio de n-adas de elementos de G que conmutan se puede describir como un espacio de homomorfismos: $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, G) \cong \{(g_1, \dots, g_n) \in G^n : g_i g_j = g_j g_i\}$.
- Le damos una topología como subespacio de G^n.

Ejemplo: conmutatividad en $SU(2)$

- $SU(2)$ es el grupo de cuaternios unitarios.
- Un cuaternio lo escribimos como $a + u$ donde:
  - $a \in \mathbb{R}$ es la parte real,
  - $u = xi + yj + zk \in \mathbb{R}^3$ es la parte imaginaria.
- La multiplicación está dada por $uv = -u \cdot v + u \times v$.
- $a + u$ y $b + v$ conmutan si y solo si u y v son paralelos.

Ejemplo: $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, SU(2))$

- En $S^2 \times S^1 \times S^1$ definimos $(v, a, b) \sim (-v, \bar{a}, \bar{b})$.
- Sea p la aplicación dada por:

$$(S^2 \times S^1 \times S^1)/\sim \ \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, SU(2))$$
$$[v, a_1 + a_2 i, b_1 + b_2 i] \mapsto (a_1 + a_2 v, b_1 + b_2 v)$$

- p está bien definida y es suprayectiva.
- $p([v, \pm 1, \pm 1]) = (\pm 1, \pm 1)$.
- p restringida a $\left(S^2 \times (S^1 \times S^1 \setminus \{\pm 1\} \times \{\pm 1\})\right) / \sim$ es homeomorfismo a su imagen.
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, SU(2))$ se obtiene de $(S^2 \times S^1 \times S^1)/\sim$ colapsando cuatro copias de $\mathbb{RP}^2$ a un punto cada una.

Espacios de homomorfismos más generales

- Si Γ es un grupo generado por $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, un homomorfismo $\Gamma \to G$ está determinado por las imágenes de $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.
- Podemos darle a $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ topología como subespacio de G^n.
- Es fácil ver que la topología no depende del conjunto de generadores elegido.

Comportamiento homotópico de $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$

- Los topológos algebraicos estamos acostumbrados a que si existe un *homomorfismo de grupos* $f : H \to G$ que además es una *equivalencia homotópica*, entonces propiedades homotópicas básicas de G y H coinciden.
- Por ejemplo, los espacios clasificantes BG y BH son homotópicamente equivalentes y por lo tanto la teoría de haces principales es la misma para G y H.
- Pero, ¡ni siquiera el número de componentes conexas de $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ y $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ tienen porqué coincidir!
- Ni siquiera cuando $H = K$ es el subgrupo compacto maximal de G y f la inclusión.

El subgrupo compacto maximal de un grupo de Lie

- Un grupo de Lie conexo G siempre tiene un subgrupo compacto maximal K.
- Todos los subgrupos compactos maximales son conjugados entre sí.
- G es *homeomorfo* a $K \times \mathbb{R}^d$ para algún d, pero usualmente no *isomorfo como grupo*.
- La inclusión $K \hookrightarrow G$ es un homomorfismo que además es una equivalencia homotópica.
- Cuidado: aunque G sea un grupo de Lie complejo, K es real.
- Ejemplos básicos: $G = GL(n, \mathbb{R})$, $K = O(n)$; $G = GL(n, \mathbb{C})$, $K = U(n)$.

Un ejemplo de Alejandro Adem y Fred Cohen

- $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$ es el grupo fundamental de una superficie de género al menos 2 (y $\Gamma^{ab} = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$).
- $G = SL(2, \mathbb{R})$ y $K = SO(2)$ su compacto subgrupo maximal.
- Hay representaciones fieles de Γ en $SL(2, \mathbb{R})$ (Fricke y Klein).
- El siguiente diagrama muestra que α no es suprayectiva en componentes conexas:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Gamma^{ab}, SO(2)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\Gamma, SO(2)) \arrow[d, "\alpha"'] \\
\mathrm{Hom}(\Gamma^{ab}, SL(2, \mathbb{R})) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\Gamma, SL(2, \mathbb{R}))
\end{tikzcd}$$

La situación para n-adas que conmutan

- Un teorema de Alexandra Pettet y Juan Suoto:
  Si G el grupo de puntos (complejos, resp. reales) de un grupo algebraico reductivo (complejo, resp. real) y K es su subgrupo compacto maximal, entonces $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, K)$ es un retracto fuerte por deformación de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, G)$.
- Ejemplos de grupos algebraicos reductivos: $GL(n)$, $SL(n)$ $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(2n)$.
- Lo mismo vale para Γ nilpotentes y finitamente presentado, por trabajo de Maxime Bergeron.
- Cuando G no es algebraico, ¡esto es falso!

El grupo de Heisenberg

- $G = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. G no es algebraico.
- $\begin{pmatrix} 1 & a & [c] \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & x & [z] \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ conmutan si y solo si $ay - bx \in \mathbb{Z}$.
- Por lo tanto $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, G)$ tiene una infinidad de componentes.
- El subgrupo compacto maximal es el $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de la esquina: $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, K)$ es conexo.

$B_{\text{com}}G$

- Definido por Alejandro Adem, Fred Cohen y Enrique Torres Giese en 2012.
- Estudiado por Alejandro Adem y José Manual Gómez en 2015.
- Los $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, G)$ para G fija y n variando forman un *espacio simplicial*, su *realización geométrica* es:
  $B_{\text{com}}G := |\text{Hom}(\mathbb{Z}^\bullet, G)| = \left(\coprod_{n\geq 0} \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, G) \times \Delta^n\right) / \sim$
- Es un subespacio simplicial de un modelo clásico para BG, el *espacio clasificante* de G: $BG = |G^\bullet|$.
- Por construcción hay una aplicación canónica $B_{\text{com}}G \to BG$.

El espacio clasificante BG

- Clasifica G-haces principales.
- Un G-haz principal es un espacio Y con una acción continua y libre de G, tal que la proyección $p : Y \to Y/G =: X$ es *localmente trivial*.
- Localmente trivial: X está cubierto por abiertos U tales que $p^{-1}(U) \cong U \times G$ compatiblemente con la acción de G y las proyecciones a U.
- «Clasificar» quiere decir que hay una biyección entre:
  - Clases de isomorfismo de G-haces principales sobre X.
  - Clases de homotopía de funciones continuas $X \to BG$.

El haz universal

- El haz sobre BG clasificado por la identidad $BG \to BG$ se llama el G-haz principal *universal*, $p_G : EG \to BG$.
- Se puede probar que EG es contraíble.
- El haz clasificado por $f : X \to BG$ se puede obtener como producto fibrado:
  $Y = X \times_{BG} EG = \{(x, e) \in X \times EG : f(x) = p_G(e)\}$

Funciones de transición

- Sea $p : Y \to X$ un G-haz principal y consideremos dos abiertos U y V en X donde se trivializa.
- Sean $\rho_U : p^{-1}(U) \to U \times G$ y $\rho_V : p^{-1}(V) \to V \times G$ las trivializaciones.
- Por la compatibilidad con la acción y las proyecciones, la composición
  $\rho_V \circ \rho_U^{-1} : (U \cap V) \times G \to (U \cap V) \times G$
  debe ser de la forma $(x, g) \mapsto (x, g\phi_{UV}(x))$, con $\phi_{UV}(x) \in G$.
- Estas funciones $\phi_{UV} : U \cap V \to G$ se llaman *funciones de transición*.

¿Qué clasifica $B_{\mathrm{com}}G$?

- Clasifica *G-haces principales transicionalmente conmutativos*.
- Para especificar una *estructura transicionalmente conmutativa* en un G-haz principal $Y \to X$ basta dar una cubierta abierta trivializadora $\{U_i\}_i$ de X tal que siempre que $x \in U_i \cap U_j \cap U_k \cap U_l$, se tiene que $\phi_{U_i U_j}(x)$ y $\phi_{U_k U_l}(x)$ conmutan.
- Tal cubierta $\{U_i\}_i$ permite construir una factorización de la función clasificante, $X \to B_{\mathrm{com}}G \to BG$.
- Dos estructuras transicionalmente conmutativas son equivalentes si las aplicaciones clasificantes $X \to B_{\mathrm{com}}G$ son homotópicas.
- Problema abierto: describir esta relación de equivalencia «geométricamente». (Bernardo Villarreal y Dan Ramras tienen avances en esto.)

¡Advertencias!

- Un mismo G-haz principal puede tener múltiples estructuras transcionalmente conmutativas no equivalentes entre sí (veremos ejemplos más adelante).
- También hay G-haces principales que no tienen ninguna estructura transcionalmente conmutativa (ejemplo: el G-haz universal $EG \to BG$).

$E_{\mathrm{com}}G$

- La aplicación canónica $B_{\mathrm{com}}G \to BG$ clasifica un G-haz principal $E_{\mathrm{com}}G \to B_{\mathrm{com}}G$.
- Éste tiene una estructura transicionalmente conmutativa canónica y es el *G-haz principal transicionalmente conmutativo universal*.
- $E_{\mathrm{com}}G = B_{\mathrm{com}}G \times_{BG} EG$.
- $E_{\mathrm{com}}G$ no es contraíble en general, pero sí cuando G es abeliano, en cuyo caso $B_{\mathrm{com}}G = BG$.

Una variante: $B_{\text{com}} G_{\mathbf{1}}$ y $E_{\text{com}} G_{\mathbf{1}}$

- Si los espacios $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, G)$ no son conexos, a veces es útil considerar la componente del homomorfismo constante con valor e_G.
- Denotaremos esta componente como $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, G)_{\mathbf{1}}$.
- Estos espacios forman un subespacio simplicial de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^\bullet, G)$.
- Definimos $B_{\text{com}} G_{\mathbf{1}} := |\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^\bullet, G)_{\mathbf{1}}|$ y $E_{\text{com}} G_{\mathbf{1}} = B_{\text{com}} G_{\mathbf{1}} \times_{B_{\text{com}} G} E_{\text{com}} G$.
- Si G es $SU(n)$, $U(n)$, $Sp(2n)$ o producto de algunos de esos, entonces $B_{\text{com}} G_{\mathbf{1}} = B_{\text{com}} G$ y $E_{\text{com}} G_{\mathbf{1}} = E_{\text{com}} G$.

Cálculos de Alejandro Adem y José Manuel Gómez

- Hipótesis: G es un grupo de Lie compacto y conexo.
- Notación: Sea T un toro maximal, N su normalizador en G y $W := N/T$ el grupo de Weyl.
- Clásico: $H^*(BG;\mathbb{Q}) = (H^*(BT;\mathbb{Q}))^W$.
- $H^*(B_{\mathrm{com}}G_{\mathbf{1}};\mathbb{Q}) = (H^*(BT;\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(G/T;\mathbb{Q}))^W$
- $H^*(E_{\mathrm{com}}G_{\mathbf{1}};\mathbb{Q}) = (H^*(G/T;\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(G/T;\mathbb{Q}))^W$
- $E_{\mathrm{com}}G_{\mathbf{1}}$ es un complejo CW con un número finito de celdas.

Concentrarse en grupos compactos está más o menos justificado

- El teorema arriba mencionado de Alexandra Pettet y Juan Suoto implica que:
  Si G el grupo de puntos (complejos, resp. reales) de un grupo algebraico reductivo (complejo, resp. real) y K es su subgrupo compacto maximal, entonces $B_{\text{com}}G \simeq B_{\text{com}}K$ y $E_{\text{com}}G \simeq E_{\text{com}}K$.
- Pero, ¡no todos los grupos son algebraicos!
- Aparte: ¿qué tan importante es la conexidad?

Cálculos que hicimos Bernardo Villarreal, Simon Gritschacher y yo

- Son para grupos de dimensiones bajas, $G = SU(2), U(2), O(2), SO(3)$.
- Nótese que todos son compactos, pero $O(2)$ no es conexo.
- Para $G = SO(3)$ solo tenemos información de $B_{\mathrm{com}}SO(3)_{\mathbf{1}}$ y $E_{\mathrm{com}}SO(3)_{\mathbf{1}}$. Abajo escribo $B_{\mathrm{com}}G$, pero para $G = SO(3)$ quiero decir $B_{\mathrm{com}}SO(3)_{\mathbf{1}}$.
- En cada caso calculamos:
  - El anillo de cohomología entera de $B_{\mathrm{com}}G$.
  - El anillo de cohomología módulo 2 de $B_{\mathrm{com}}G$ y la acción del álgebra de Steenrod.
  - El tipo de homotopía de $E_{\mathrm{com}}G$. ¡La respuesta es simple y sorprendente!

$B_{\mathrm{com}}O(2)$

- $H^*(BO(2);\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[w_1, w_2]$
- $H^*(BO(2);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[W_1, W_2, p_1]/(2W_1, 2W_2, W_2^2 - p_1 W_1)$
- $H^*(B_{\mathrm{com}}O(2);\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[w_1, w_2, \bar{r}, s]/(\bar{r}w_1, \bar{r}^2, \bar{r}s, s^2)$
- $H^*(B_{\mathrm{com}}O(2);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[W_1, W_2, p_1, r, b_1, b_2, b_3]/I$ donde I es el ideal generado por $W_2^2 - p_1 W_1$, $r^2 - 4p_1$, $b_2 p_1 - b_3 W_2$, $b_2 W_2 - b_3 W_1$, $2W_i$, rW_i y $b_1 W_i$ para $i = 1, 2$ así como $2b_i$, rb_i y $b_i b_j$ para $1 \leq i, j \leq 3$.

$E_{\mathrm{com}}O(2)$

- $E_{\mathrm{com}}O(2) \simeq S^3 \vee S^2 \vee S^2$

n	$\pi_n(B_{\mathrm{com}}O(2))$	n	$\pi_n(B_{\mathrm{com}}O(2))$
1	$\mathbb{Z}/2$	6	$\mathbb{Z}^{16} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{11} \oplus (\mathbb{Z}/12)^4$
2	$\mathbb{Z}^3$	7	$\mathbb{Z}^{34} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{27} \oplus (\mathbb{Z}/12)^4$
3	$\mathbb{Z}^4$	8	$\mathbb{Z}^{68} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{58} \oplus (\mathbb{Z}/24)^7$
4	$\mathbb{Z}^4 \oplus (\mathbb{Z}/2)^4$	9	$\mathbb{Z}^{140} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{113} \oplus (\mathbb{Z}/3)^4 \oplus (\mathbb{Z}/24)^{16}$
5	$\mathbb{Z}^7 \oplus (\mathbb{Z}/2)^8$	10	$\mathbb{Z}^{308} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{215} \oplus (\mathbb{Z}/3)^4 \oplus (\mathbb{Z}/15)^4 \oplus (\mathbb{Z}/24)^{34}$

$B_{\text{com}}SU(2)$

- $H^*(BSU(2);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_2]$
- $H^*(B_{\text{com}}SU(2);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_2, y_1, x_2]/(2x_2, y_1^2, x_2y_1, x_2^2)$
- $H^*(B_{\text{com}}SU(2);\mathbb{F}_2) \cong$
  $\mathbb{F}_2[\bar{c}_2, \bar{y}_1, x_1, \bar{x}_2]/(\bar{y}_1^2, \bar{y}_1x_1, x_1^2, \bar{x}_2\bar{y}_1, x_1\bar{x}_2, \bar{x}_2^2)$

$E_{\text{com}}SU(2)$

- $E_{\text{com}}SU(2) \simeq S^4 \vee \Sigma^4 \mathbb{RP}^2$
- $\pi_n(B_{\text{com}}SU(2)) = 0$ para $n = 1, 2, 3$, y

n	$\pi_n(B_{\text{com}}SU(2))$	n	$\pi_n(B_{\text{com}}SU(2))$
4	$\mathbb{Z}^2$	8	$(\mathbb{Z}/2)^6$
5	$(\mathbb{Z}/2)^3$	9	$(\mathbb{Z}/2)^6$
6	$(\mathbb{Z}/2)^3$	10	$\mathbb{Z}/12 \oplus (\mathbb{Z}/24)^2$
7	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus (\mathbb{Z}/12)^2$		

Aplicación: $B_{\mathrm{com}}G \not\simeq E_{\mathrm{com}}G \times BG$

- Alejandro Adem y José Manuel Gómez prueban que $\Omega B_{\mathrm{com}}G \simeq \Omega E_{\mathrm{com}}G \times \Omega BG$.
- Simon Gritschacher probó que $B_{\mathrm{com}}G \not\simeq E_{\mathrm{com}}G \times BG$ cuando G es un grupo de Lie compacto y conexo. Nuestros cálculos lo prueban también para $G = O(2)$ y dan una prueba totalmente distinta para $G = SU(2)$.
- $B_{\mathrm{com}}SU(2)$ y $E_{\mathrm{com}}SU(2) \times BSU(2)$ tienen:
  - Anillos de cohomología entera isomorfos.
  - Anillos de cohomología módulo 2 isomorfos.
  - Grupos de homotopía isomorfos.
  - ¡Distinta acción del álgebra de Steenrod!

Fin

¡Gracias por su atención!

Tiempo extra: cómo atacar $B_{\mathrm{com}}SU(2)$

- Hay un coproducto amalgamado (homotópico) de espacios:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{RP}^2 \times \{\pm 1\}^n \arrow[r] \arrow[d] & (S^2 \times (S^1)^n)/\sim \arrow[d] \\
\{\pm 1\}^n \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, SU(2))
\end{tikzcd}$$

- Variando n y tomando realización geométrica obtenemos un coproducto amalgamado homotópico para $B_{\mathrm{com}}SU(2)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^\infty \arrow[r] \arrow[d] & (S^2 \times \mathbb{CP}^\infty)/\sim \arrow[d] \\
\mathbb{RP}^\infty \arrow[r] & B_{\mathrm{com}}SU(2)
\end{tikzcd}$$

Tiempo extra: cómo atacar $E_{\text{com}}SU(2)$

- Usando la aplicación canónica $B_{\text{com}}SU(2) \to BSU(2)$, podemos darle a los cuatro espacios en el cuadro anterior aplicaciones compatibles a $BSU(2)$. Tomando fibras homotópicas obtenemos un coproducto amalgamado homotópico para $E_{\text{com}}SU(2)$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^3 \arrow[r] \arrow[d] & (S^2 \times \mathbb{CP}^1)/\sim \arrow[d] \\ \mathbb{RP}^3 \arrow[r] & E_{\text{com}}SU(2) \end{tikzcd}$$

Tiempo extra: el S^4 en $E_{\mathrm{com}}SU(2) \simeq S^4 \vee \Sigma^4\mathbb{RP}^2$

- Sea X el coproducto amalgamado homotópico que se obtiene restringiendo ese cuadro a una copia de $\mathbb{RP}^2$ dentro de $\mathbb{RP}^3$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^3 \arrow[r] \arrow[d] & (S^2 \times \mathbb{CP}^1)/\sim \arrow[d] \\
\mathbb{RP}^3 \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

- Usando van Kampen y Mayer-Vietoris, calculamos que X es una 4-esfera homológica simplemente conexa, por lo que $X \simeq S^4$.
- Es fácil ver que la cofibra homotópica de $S^4 \to E_{\mathrm{com}}SU(2)$ es $\Sigma^4\mathbb{RP}^2$. Para determinar que $E_{\mathrm{com}}SU(2)$ es simplemente la cuña se require un análisis más delicado.

Ahora sí: ¡Fin!

Gracias de nuevo por su atención.