Homotopía Motívica

Mezclando geometría algebraica con teoría de homotopía

Omar Antolín Camarena

Instituto de Matemáticas UNAM, C.U.

10 de septiembre de 2018

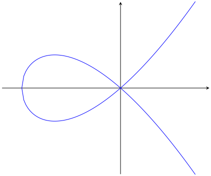
Perspectivas recientes en Geometría

ESFM-IPN

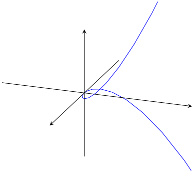
¿Qué estudia la geometría algebraica?

La *geometría algebraica* estudia *variedades algebraicas*, que están definidas por ecuaciones **polinomiales**.

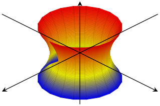
$y^2 = x^2(x+1)$



$y = x^2, z = x^3$



$x^2 + y^2 = z^2 + 1$



Las ecuaciones se puede interpretar donde quiera que tengan sentido: podemos buscar soluciones reales, complejas, racionales, enteras, etc. Los dibujos de arriba muestran soluciones reales.
Para relacionar dos variedades estudiamos *morfismos regulares* entre ellas: funciones definidas por **polinomios**.

¿Qué estudia la topología algebraica?

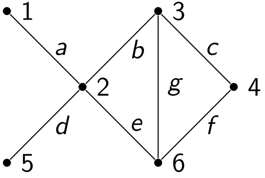
Topología ...

La *topología*, desde luego, estudia espacios topológicos. (Si aún no saben la definición, piensen simplemente en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.) Para relacionar dos espacios topológicos estudiamos *funciones continuas* entre ellos.

... Algebraica

La topología *algebraica* estudia a los espacios usando álgebra, a saber, define varios *invariantes* que a cada espacio topológico le asocian un objeto algebraico, como un grupo o un espacio vectorial. Si un invariante asocia a dos espacios objetos algebraicos no isomorfos, los espacios no pueden ser "equivalentes".
Los invariantes más populares son los *grupos de homotopía*, la *homología* y la *cohomología*.

¿Cuántos “hoyos” tiene una gráfica?



$$D = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un ciclo produce un elemento del núcleo de D. El tríangulo bge corresponde al vector $b+g-e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$.
El núcleo de D tiene como base a los tríangulos $b+g-e$ y $c+f-g$, indicando que la gráfica G tiene “dos hoyos”, o sea, $H_1(G;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
El cuadrilátero $bcef$ también es un “hoyo”, pero no es uno independiente pues $b+c-e+f = (b+g-e)+(c+f-g)$.

¿Por qué estudiar espacios usando álgebra?

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: "I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvellous machine."

— Michael Atiyah

El álgebra es lo que el diablo le ofrece al matemático. El diablo dice: «Te daré está poderosa máquina que contestará cualquier pregunta que tengas. Todo lo que necesitas hacer a cambio es darme tu alma: renuncia a la geometría y te daré esta máquina maravillosa.»

— Michael Atiyah

Comparando a la geometría algebraica con la topología algebraica

- Si tomamos las soluciones reales o complejas de un sistema de ecuaciones polinomiales podemos obtener muchos espacios familiares. (Por otra parte las soluciones enteras, por ejemplo, no son muy interesantes como espacios topológicos.)
- Hay muchísimos más espacios topológicos que los que podemos obtener de esa manera, pero más sútilmente y con mayor importancia, incluso para esos espacios *hay muchas más funciones continuas que funciones polinomiales*.
- Esto hace que muchas variedades complejas sean homeomorfas (isomorfas *como espacios topológicos*) sin ser isomorfas como variedades algebraicas. Por ejemplo, hay una cantidad no numerables de curvas elípticas sobre los complejos, pero todas son homeomorfas a $S^1 \times S^1$.

Solomon Lefschetz

Fue mi destino clavar el arpón de la topología algebraica en el cuerpo de la ballena que es la geometría algebraica.

— *Solomon Lefschetz*

Lefschetz aplicó herramientas de la topología algebraica a los espacios de puntos complejos de variedades algebraicas. La *teoría de homotopía motívica* hace algo diferente, **intrínseco** a las variedades, sin recurrir a la topología de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

¿Qué estudia la teoría de homotopía?

La *teoría de homotopía* estudia a los espacios topológicos salvo **equivalencia homotópica**.

Definición

Una *homotopía* entre dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ es una función $H : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para toda $x \in X$.

Definición

Dos espacios X y Y son *homotópicamente equivalentes* si existen funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $f \circ g$ es homotópica a id_Y y $g \circ f$ es homotópica a id_X.

Ejercicio

¿Cuáles de los siguientes espacios, que se ven como letras, son homotópicamente equivalentes?
$A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I\ J\ K\ L\ M\ N\ O\ P\ Q\ R\ S\ T\ U\ V\ W\ X\ Y\ Z$

Herramientas de la teoría de homotopía

Mencionamos tres invariantes que define la topología algebraica para distinguir espacios topológicos:

Grupos de homotopía $\pi_n(X)$ es el conjunto de clases de homotopía[1] de aplicaciones de la esfera S^n a X.

Homología y cohomología $H_n(X;\mathbb{Z})$ y $H^n(X;\mathbb{Z})$ están definidos en términos de aplicaciones de simplejos Δ^n a X.

$$\Delta^n := \{(t_0,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0, \sum_i t_i = 1\}.$$

Resulta que estos invariantes *no distinguen espacios homotópicamente equivalentes*, así que su estudio pertenece a la teoría de homotopía.

[1] basadas

Una teoría **ingenua** de homotopía para variedades

Podemos intentar imitar las definiciones de homotopía, grupos de homotopía y (co)homología escogiendo variedades que sustituyan al intervalo $[0, 1]$, a las esferas S^n y a los simplejos Δ^n.

El intervalo

El intervalo simplemente consta de dos puntos y la trayectoria más simple posible que los une. El análogo en geometría algebraica es una recta, así que tomamos $\mathbb{A}^1$ —las soluciones del sistema de ecuaciones de una variable y ¡cero ecuaciones!.

Definición (ingenua)

Dos morfismos $f, g : X \to Y$ entre variedades son *homotópicos* si existe un morfismo $H : X \times \mathbb{A}^1 \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Problemas con la homotopía ingenua

No hay suficientes morfismos

Para muchas variedades X hay muy pocos morfismos $\mathbb{A}^1 \to X$. Por ejemplo, pensando en puntos complejos podríamos esperar que $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ sea homotópicamente algo como un círculo, al menos conexo por trayectorias, pero cualquier morfismo $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, ¡es constante!

Demostración.

Un morfismo $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ corresponde a un homormorfismo de anillos $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \to \mathbb{C}[x]$.
Los únicos polinomios en $\mathbb{C}[x]$ que tienen inverso multiplicativo son las constantes, de modo que que t debe ir a una constante. $\square$

Problemas con la homotopía ingenua

No es relación de equivalencia

Sí es reflexiva (tomen $H(x,t) = f(x)$) y simétrica (tomen $\tilde{H}(x,t) = H(x, 1-t)$), pero no es transitiva.

¿Por qué sí resulta transitiva en la versión de espacios topólogicos? Dadas homotopías $X \times [0,1] \to Y$, una de f a g y otra de g a h, obtenemos naturalmente una función $X \times D \to Y$ donde D es el cociente de $[0,1] \sqcup [0,1]$ que identifica $1 \sim 0$.
El espacio D es homemorfo a $[0,1]$.

El ánalogo a D en geometría algebraica es la unión de los ejes en $\mathbb{A}^2$, la variedad $xy = 0$. Cualquier morfismo $\mathbb{A}^1 \to \{xy = 0\}$ se queda atrapado en uno de los dos ejes.

Arreglo

Redefinimos homotopía ingenua como la relación de equivalencia *generada* por la definición anterior.

Un ejemplo de cálculos con homotopía ingenua

Proposición

Si k es un campo, todos los morfismos $\operatorname{Spec} k \to SL_n$ *son ingenuamente homotópicas entre sí.*

Demostración.

Un morfismo $\operatorname{Spec} k \to SL_n$ es una matriz de $n \times n$ con entradas en k y determinante 1. Cualquiera se puede escribir como producto de matrices elementales:

$$E_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda(\delta_{ir}\delta_{js})_{rs}.$$

La homotopía $H(t) = E_{ij}(\lambda t)$ conecta a $E_{ij}(\lambda)$ con I_n. $\square$

Ejercicio

Para un campo k, las clases de homotopía ingenua de morfismos $\operatorname{Spec} k \to GL_n$ *están en biyección con $k \setminus \{0\}$ por medio del determinante.*

Análogos de las esferas

¿Qué variedad podríamos escoger como análogo de las esferas? Bastaría escoger un análogo de S^1, pues las demás se pueden obtener con *suspensiones* o como productos "smash": $S^n = S^1 \wedge S^1 \wedge \cdots \wedge S^1$.

Suspensión

ΣX se obtiene pegando dos copias del cono sobre X por la base. Más generalmente, si $X \subset C_1, C_2$ con C_1 y C_2 contraíbles (homotópicamente equivalentes a un punto), identificar las copias en X en C_1 y C_2 produce algo homotópicamente equivalente a ΣX.

Producto *smash*

El producto smash de X y Y, con puntos base x_0 y y_0 respectivamente, se obtiene de colapsar $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ dentro de $X \times Y$ a un solo punto.

Análogos de las esferas

Podemos buscar inspiración en el tipo de homotopía de los espacios de puntos reales o complejos de variedades sencillas. Hay algunas esferas:

Variedad[2]	Puntos reales	Puntos complejos
$\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$	S^0	S^1
$\mathbb{P}^1$	S^1	S^2
$\mathbb{A}^1/\{0,1\}$	S^1	S^1

Esto es confuso: ¡no se deciden de qué dimensión quieren ser!

[2] Bueno, la última no es precisamente una variedad.

Más sobre esferas

- $\mathbb{P}^1$ se obtiene pegando dos copias de $\mathbb{A}^1$ identificando los $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ contenidos en ellas. Como $\mathbb{A}^1$ es ingenuamente contraíble, $\mathbb{P}^1 \simeq \Sigma(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$.
- La otra esfera, $\mathbb{A}^1/\{0,1\}$, no está emparentada con $\mathbb{P}^1$ y $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.
- ¡Simplemente tenemos dos tipos de esferas genuinamente diferentes!

  Definimos

  $$S^{m,n} := (\mathbb{A}^1/\{0,1\})^{\wedge m} \wedge (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})^{\wedge n}.$$

  Y tenemos una familia de dos parámetros de grupos de homotopía.

Homología singular ingenua

Nos falta discutir el ánalogo del simplejo

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) : t_i \geq 0, t_0 + \cdots + t_n = 1\}.$$

Podríamos simplemente tomar la variedad definida por la ecuación $t_0 + \cdots + t_n = 1$, ignorando la condición $t_i \geq 0$, e incluso ignorando el requisito de que los t_i sean números reales, dejándolos variar donde quiera que estemos buscando soluciones a la ecuación. Esto define un invariante, pero no uno muy interesante: esa versión de Δ^n es isomorfa a $\mathbb{A}^n$ y para muchas variedades X no hay morfismos $\mathbb{A}^n \to X$ a parte de los que son constantes.

Andrei Suslin definió una variante menos ingenua de esto ahora llamada *homología de Suslin*.

¿Y cómo se define la versión no ingenua de la teoría?

Teorías de homotopía hechas a la medida

Originalmente solo había *la* teoría de homotopía, que estudia espacios topológicos salvo equivalencia homotópica. Con el tiempo se entendió que se las ideas son mucho más generales y se pueden aplicar a toda clase de objetos en lugar de espacios topológicos.

Para construir una teoría de homotopía basta especificar:

- La *categoría* de los objetos que queremos estudiar, es decir, los objetos y los morfismos entre ellos.
- Una colección de morfismos en la categoría, que llamaremos *equivalencias débiles* y que quisiéramos tratar como si fueran isomorfismos.

La teoría de homotopía hecha a la medida para esa ocasión estudiará a los objetos salvo esas equivalencias débiles.

Ejemplos de teorías de homotopía hechas a la medida

La de espacios topológicos

Objetos	Espacios topológicos
Morfismos	Funciones continuas
Equivalencias débiles	Equivalencias homotópicas

Álgebra homológica

Objetos	Complejos de cadena
Morfismos	Morfismos de complejos de cadena
Equivalencias débiles	Los cuasi-isomorfismos: morfismos que inducen isomorfismos en la homología

Por este segundo ejemplo, la teoría de teorías de homotopía generalizadas se conoce también como *álgebra homotópica*.

¿Dónde quedaron las homotopías en el caso de espacios?

Si nos tomamos en serio lo de tratar las equivalencias débiles como isomorfismos, ¡las funciones homotópicas se vuelven iguales!

Una teoría de homotopía tiene asociada una categoría nueva, llamada su *categoría homotópica*, que se forma agregándole a la categoría especificada inversos para las equivalencias débiles.

En el caso de espacios topológicos:

- La proyección $p : X \times [0, 1] \to X$ es una equivalencia homotópica, así que adquire un inverso p^{-1} en la categoría homotópica.
- Las inclusiones i_0, i_1 de X en $X \times [0, 1]$ como $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$ respectivamente, cumplen que $p \circ i_0 = \mathrm{id}_X = p \circ i_1$. Componiendo con p^{-1}, obtenemos que $i_0 = i_1$ en la categoría homotópica.
- Finalmente, si $H : X \times [0, 1] \to Y$ es una homotopía entre f y g, entonces $f = H \circ i_0 = H \circ i_1 = g$.

La teoría de homotopía motívica, casi

Principalmente queremos lograr que $\mathbb{A}^1$ sea contraíble, así que tomamos como equivalencias débiles básicas las proyecciones $X \times \mathbb{A}^1 \to X$.
Entonces, la teoría de homotopía motívica es algo así como la teoría de homotopía hecha a la medida sobre la categoría de variedades con equivalencias débiles dadas por las proyecciones $X \times \mathbb{A}^1 \to X$.

...excepto que la categoría de variedades no es tan flexible para usar como base para una teoría de homotopía como lo es la categoría de espacios topológicos. No podemos cómodamente armar nuevas variedades cortando y pegando otras, cómo podemos hacer con espacios.

La teoría de homotopía motívica

Para agregar *cortaypegabilidad* a las variedades procedemos en tres pasos:

- Tomamos la teoría de homotopía *libre* generada por la categoría Var de variedades, a saber, $\mathrm{Fun}(\mathrm{Var}^{op}, \mathrm{Top})$, con equivalencias débiles aquellas transformaciones naturales tales que todas sus componentes son equivalencias homotópicas.
- Aquí los pocos pegados exitosos que teníamos (como que $\mathbb{P}^1$ se obtiene pegando dos copias de $\mathbb{A}^1$ a lo largo de $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$) los rompimos. Se pueden reestablecer restringiéndonos a *gavillas* para una topología de Grothendieck. Por motivos técnicos la topología de Grothendieck elegida es la de Nisnevich[3].
- Ahora sí, agregamos a nuestras equivalencias débiles las proyecciones $X \times \mathbb{A}^1 \to X$.

[3] Hace que la "teoría K algebraica sea representable", por ejemplo.

¿Para qué se inventó todo esto?

Vladimir Voevodsky, quien desarrolló está teoría junto con Fabien Morel, la usó para demostrar la conjetura de Milnor, que dice lo siguiente:

Para un campo F de característica distinta de dos formamos un anillo, llamado la teoría K de Milnor de F, eligiendo variables *no conmutativas* x_a para cada $a \in F \setminus \{0\}$ e imponiendo la relación $x_a x_{1-a} = 0$ para toda $a \neq 0, 1$.
La conjetura de Milnor dice que ese anillo, módulo 2, coincide con el anillo de cohomología del grupo de Galois de F con coeficientes en $\mathbb{Z}/2$.

Fin

¡Muchas gracias!