Generación superior de grupos de Lie compactos por subgrupos abelianos

Omar Antolín Camarena (IMATE UNAM - CDMX)

¿De qué trata esta plática?

- Esta plática es sobre un espacio $E(2, G)$ que se puede asociar a cualquier grupo topológico G.
- El espacio $E(2, G)$ sabe sobre cuales elementos de G conmutan y cuales no. En particular, de la definición: Si G es abeliano entonces $E(2, G)$ es contráctil.
- Simon Gritschacher, Bernardo Villarreal y yo probamos un recíproco fuerte para grupos de Lie compactos: Si G es un grupo de Lie compacto y $E(2, G)$ tiene $\pi_1 = \pi_2 = \pi_4 = 0$, entonces G es abeliano.
- Antecedentes:
    - Cuando G es discreto hay un mejor resultado de Cihan Okay: Si G es un grupo discreto y $\pi_1(E(2, G)) = 0$, entonces G es abeliano.
    - Un teorema de Araki, James y Thomas: Si G es un grupo de Lie compacto y conexo, y el conmutador $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g^{-1}h^{-1}gh$ es homotópico a una constante, entonces G es abeliano.

El Plan

- Primero les cuento sobre el caso de grupos discretos.
  - Un recordatorio sobre complejos simpliciales.
  - La idea de Abels y Holz de «generación superior».
  - El teorema de Cihan Okay: $\pi_1(E(2, G)) = 0$ implica que G es abeliano.
- Luego les platico sobre el caso de grupos de Lie.
  - Un recordatorio sobre espacios simpliciales.
  - La definición de $E(2, G)$.
  - La herramienta principal de nuestro teorema: el mapa conmutador.

Complejos simpliciales

Definición

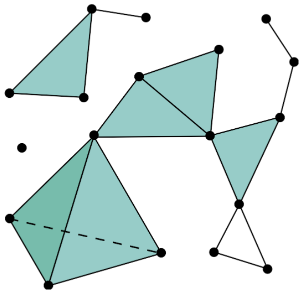
Un *complejo simplicial* K es una familia de conjuntos finitos no vacíos tal que $\emptyset \neq \sigma \subset \tau \in K \implies \sigma \in K$.
Los *vértices* son los elementos de los singuletes:

$$V(K) := \{v : \{v\} \in K\} = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma.$$

Realización geométrica $|K|$

Pensamos en los elementos de K como *simplejos.*

- $\{u\} \in K$ es un vértice
- $\{u, v\} \in K$ es una arista
- $\{u, v, w\} \in K$ es un tríangulo
- etc.



El teorema del nervio

El nervio de una cubierta

Si $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$ es una cubierta de un espacio X, el *nervio* de $\mathcal{U}$ es un complejo simplicial $N_{\mathcal{U}}$ con:

vértices los elementos de J

simplejos los $\{j_0, \ldots, j_n\}$ tales que $U_{j_0} \cap U_{j_1} \cap \cdots \cap U_{j_n} \neq \emptyset$.

El teorema del nervio

Si $\mathcal{U}$ cumple que para cualquier $\{j_0, \ldots, j_n\} \subseteq J$ la intersección $U_{j_0} \cap U_{j_1} \cap \cdots \cap U_{j_n} \neq \emptyset$ es *vacía o contráctil*, entonces X es homotópicamente equivalente a $N_{\mathcal{U}}$.

Las letras pequeñas

El teorema se cumple si:

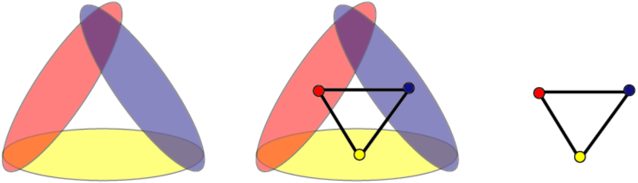
- $\mathcal{U}$ es una cubierta *abierta* de un espacio X, o
- $\mathcal{U}$ es una cubierta *por subcomplejos* de un complejo simplicial.

Demostración del teorema del nervio

~~Demostración~~ Ejemplo del teorema del nervio

Supongamos que $X = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ con:

- U_i contráctil,
- $U_i \cap U_j$ contráctil, y
- $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ vacío.



Entonces $N_{\{U_1, U_2, U_3\}}$ es un triángulo sin relleno.

Otros modelos del nervio

Sea $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$ una familia de subconjuntos de X.
Podemos construir los siguientes complejos simpliciales:

- $N_{\mathcal{U}}$, el nervio de la familia.
- $S_{\mathcal{U}}$, el complejo simplicial de subconjuntos de elementos de $\mathcal{U}$: $\{x_0, \ldots, x_n\}$ es un simplejo de $S_{\mathcal{U}}$ si existe $j \in J$ tal que $\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq U_j$.
- $C_{\mathcal{U}}$, el complejo de orden del copo $(\mathcal{U}, \subseteq)$, cuyos simplejos son cadenas $U_{j_0} \subseteq U_{j_1} \subseteq \cdots \subseteq U_{j_n}$.

Teorema (Abels y Holz)

- *$N_{\mathcal{U}}$ y $S_{\mathcal{U}}$ son homotópicamente equivalentes.*
- *Si $\mathcal{U}$ es cerrado bajo intersecciones no vacías, entonces tambien $C_{\mathcal{U}}$ es homotópicamente equivalente a $N_{\mathcal{U}}$ y $S_{\mathcal{U}}$.*

El nervio y el complejo de subconjuntos

- Dado $x \in X$, sea $J_x = \{j \in J : x \in U_j\}$.
- Todos los subconjuntos finitos no vacíos de J_x son simplejos de $N_{\mathcal{U}}$.
- Sea N_x el subcomplejo de $N_{\mathcal{U}}$ formado por dichos simplejos. $\mathcal{N} := \{N_x : x \in X\}$ es una cubierta de $N_{\mathcal{U}}$.
- $N_{x_0} \cap \cdots \cap N_{x_n}$ consta de todos los subconjuntos finitos no vacíos de $\{j \in J : \{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq U_j\}$. Por lo tanto, la intersección es vacía si ese conjunto de índices es vacío y contráctil de lo contrario.
- Por el teorema del nervio, $N_{\mathcal{U}} \simeq N_{\mathcal{N}} \cong S_{\mathcal{U}}$.

El complejo de orden de la cubierta

- Dado $x \in X$, sea $\mathcal{U}_x = \{U_j \in J : x \in U_j\}$.
- Sea C_x el complejo de orden de $(\mathcal{U}_x, \subseteq)$.
  $\mathcal{C} := \{C_x : x \in X\}$ es una cubierta de $C_{\mathcal{U}}$.
- $C_{x_0} \cap \cdots \cap C_{x_n}$ es el complejo de orden de $\mathcal{I} := \{U_j : \{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq U_j\}$. Por lo tanto, la intersección es vacía si $\mathcal{I} = \emptyset$.
- Si $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y $\mathcal{U}$ es cerrado bajo intersecciones no vacías, entonces $\mathcal{I}$ es dirigido y por lo tanto su complejo de orden es contráctil.
- Por el teorema del nervio, $C_{\mathcal{U}} \simeq N_{\mathcal{C}} \cong C_{\mathcal{U}}$.

Clases laterales

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de un grupo discreto G, cerrada bajo intersección.
La colección $G\mathcal{F} = \{gH : g \in G, H \in \mathcal{F}\}$ de todas clases laterales de elementos de $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de G a la que le podemos aplicar las construcciones anteriores.
Obtenemos tres complejos simpliciales homotópicamente equivalentes con los siguientes simplejos:

- $N_{G\mathcal{F}}$ conjuntos de clases laterales con intersección no vacía
- $S_{G\mathcal{F}}$ conjuntos de elementos de G contenidos en alguna clase lateral
- $C_{G\mathcal{F}}$ cadenas de clases laterales ordenadas por inclusión.

Si $G \in \mathcal{F}$, estos se vuelven contráctiles.

Generación superior

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de un grupo discreto G, cerrada bajo intersección.

El grupo $H = \operatorname{colim}_{F \in \mathcal{F}} F$ tiene la siguiente presentación:

generadores x_g con $g \in \bigcup \mathcal{F}$,

relaciones $x_{gh} = x_g x_h$ cuando $g, h \in F$ para algún $F \in \mathcal{F}$.

Hay un homomorfismo canónico $\kappa : H \to G$ dado por $\kappa(x_g) = g$.

Teorema (Abels y Holz)

- $\pi_0(N_{G\mathcal{F}}) = G/\langle \bigcup \mathcal{F} \rangle$
- $\pi_1(N_{G\mathcal{F}}) = \ker \kappa$

Definición (Abels y Holz)

La familia $\mathcal{F}$ es n-generadora si $\pi_k(N_{G\mathcal{F}}) = 0$ para toda $k < n$.

La familia de subgrupos abelianos

Para la familia $\mathcal{A}$ de subgrupos abelianos de G podemos decir más. Primero, recuerden que si G mismo es abeliano, $N_{G\mathcal{A}}$, $S_{G\mathcal{A}}$ y $C_{G\mathcal{A}}$ son contráctiles.

Teorema (Okay)

Si $\pi_1(C_{G\mathcal{A}}) = 1$, entonces G es abeliano.

Demostración.

Por el teorema de Abels & Holz, el grupo

$$H = \langle x_g : g \in G \mid x_{gh} = x_g x_h \text{ si } [g,h] = 1 \rangle$$

es isomorfo a G a través de $\kappa(x_g) = g$.
Como $(gh)^{-1} = g^{-1}h^{-1}$ cuando $[g,h] = 1$, la fórmula $x_g \mapsto x_g^{-1}$ define un endomorfismo de H. Por lo tanto $g \mapsto g^{-1}$ define un endomorfismo de G y G es abeliano. $\square$

Conmutatividad afín

Sea G un grupo y sean $g_0, \ldots, g_n \in G$. Describamos los simplejos de $S_{G\mathcal{A}}$, donde $\mathcal{A} =$ subgrupos abelianos de G.
Las siguientes son equivalentes:

- $\{g_0, \ldots, g_n\}$ está contenido en alguna clase lateral de algún subgrupo abeliano.
- $\{g_0^{-1}g_1, \ldots, g_0^{-1}g_n\}$ conmutan dos a dos.
- $\{g_i^{-1}g_j : 0 \leq i, j \leq n\}$ conmutan dos a dos.

Si se cumplen estas condiciones decimos que $\{g_0, \ldots, g_n\}$ es un conjunto *afínmente conmutativo*. Llamaremos a $S_{G\mathcal{A}}$ el *complejo de conmutatividad afín* de G.

Observaciones

- Cualquier conjunto de 2 elementos o menos es afínmente conmutativo.
- Un conjunto de 3 o más elementos es afínmente conmutativo si y solo si todos sus subconjuntos de 3 elementos lo son.

El grupo fundamental de un complejo simplicial

Sea X un complejo simplicial conexo y sea T un árbol generador del 1-esqueleto.
El grupo fundamental de la realización geométrica de X tiene una presentación como sigue:

generadores un generador x_{uv} por cada par de vértices $\{u, v\} \in X$.

relaciones
- $x_{vv} = 1$
- $x_{uv} = x_{vu}^{-1}$
- $x_{uv} = 1$ si $\{u, v\} \in T$
- $x_{uv} x_{vw} = x_{uw}$ si $\{u, v, w\} \in X$

(En particular, el grupo fundamental solo depende de los vértices aristas, y tríangulos en X, no de los simplejos de dimensión mayor).

El grupo fundamental del complejo de conmutatividad afín

Como $S_{G\mathcal{A}}$ tiene todas las posibles aristas, podemos escoger como árbol generador la estrella con centro en $1 \in G$. Obtenemos la siguiente presentación para $\pi_1(S_{G\mathcal{A}})$:

generadores x_{gh} con $g, h \in G$

relaciones
- $x_{g1} = x_{1g} = 1$
- $x_{gh}x_{hk} = x_{gk}$ si $\{g, h, k\}$ es afínmente conmutativo.

El homomorfismo conmutador

Lema

$\{g, h, k\}$ es afínmente conmutativo $\implies [g, h][h, k] = [g, k]$.

Demostración.

$$\begin{aligned}(g^{-1}h^{-1}gh)(h^{-1}k^{-1}hk) &= g^{-1}(h^{-1}g)(k^{-1}h)k \\ &= g^{-1}(k^{-1}h)(h^{-1}g)k = [g, k]\end{aligned}$$

$\square$

Por lo tanto, hay un homomorfismo $c : \pi_1(S_{G\mathcal{A}}) \to [G, G]$ definido en los generadores como $c(x_{gh}) := [g, h]$.

Obviamente c es suprayectivo: su imagen incluye a todos los generadores de $[G, G]$. Por lo tanto, si $[G, G] \neq 1$, entonces $\pi_1(S_{G\mathcal{A}}) \neq 1$.

Teorema

Si $S_{G\mathcal{A}}$ es simplemente conexo, entonces G es abeliano.

Hacia grupos de Lie

Ahora les quiero platicar sobre $E(2, G)$, el análogo del complejo de conmutatividad afín para grupos topológicos que definieron Adem, F. Cohen y Torres Giese, y del análogo del teorema «$\pi_1(S_{G\mathcal{A}}) \implies G$ es abeliano» de Okay que probamos Simon Gritschacher, Bernardo Villarreal y yo.

Para definir $E(2, G)$ les tengo que contar un poco sobre espacios simpliciales, que son un variante de los complejos simpliciales que en lugar de tener un *conjunto* de simplejos, tienen un *espacio* de simplejos.

Antes de hablar de espacios simpliciales, les hablaré de conjuntos simpliciales, que solo tienen un conjunto de simplejos, al igual que los complejos simpliciales. Pueden pensar en los conjuntos simpliciales como una versión «más flexible» de los complejos simpliciales, donde los simplejos no necesariamente están determinados por sus vértices.

Conjuntos simpliciales

Un conjunto simplicial $X_\bullet$ consta de

- para cada $n \geq 0$ un conjunto abstracto X_n cuyos elementos llamamos simplejos de dimensión n —nos imaginaremos cada simplejo equipado con una numeración fija de sus vértices con los números del 0 al n—, y
- funciones $d_j^{(n)} : X_n \to X_{n-1}$ para $0 \leq j \leq n$, que interpretamos como sigue: para un simplejo $x \in X_n$ de dimensión n, el simplejo $d_j^{(n)}(x)$ es la cara opuesta al vértice j en x.

Estas funciones deben satisfacer que $d_i^{(n-1)} \circ d_j^{(n)} = d_{j-1}^{(n-1)} \circ d_i^{(n)}$ si $0 \leq i < j \leq n$, que se sigue de la interpretación que dimos para los $d_j^{(n)}$.

Convención

Para aligerar la notación, el superíndice (n) se omite.

Realización geométrica

Al igual que los complejos simpliciales, podemos pensar en los conjuntos simpliciales como instrucciones para armar un espacio a partir de simplejos.

Sea Δ^n un simplejo geométrico y sea $\iota_j : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ el encaje lineal con imagen la cara opuesta al vértice j.

Definimos $|X_\bullet| = \left(\coprod_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n \right) / \sim$, donde $(x, \iota_j(p)) \sim (d_j(x), p)$ para $x \in X_n$, $p \in \Delta^{n-1}$.

La principal diferencia con los complejos simpliciales, es que dos simplejos distintos pueden compartir parte o toda su frontera (puede pasar que $d_j(x) = d_j(y)$, y que la frontera puede estar «colapsada» (por ejemplo un $x \in X_1$ con $d_0(x) = d_1(x)$ es un lazo).

Los conjuntos simpliciales son a los complejos simpliciales como las gráficas con lazos y aristas múltiples son a las gráficas simples.

~~Conjuntos~~ Espacios simpliciales

Un ~~conjunto~~ espacio simplicial $X_\bullet$ consta de

- para cada $n \geq 0$ un ~~conjunto~~ espacio topológico X_n cuyos ~~elementos~~ puntos llamamos simplejos de dimensión n —nos imaginaremos cada simplejo equipado con una numeración fija de sus vértices con los números del 0 al n—, y
- funciones continuas $d_j : X_n \to X_{n-1}$ para $0 \leq j \leq n$, que interpretamos como sigue: para un simplejo $x \in X_n$ de dimensión n, el simplejo $d_j(x)$ es la cara opuesta al vértice j en x.

Estas funciones deben satisfacer que $d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i$ si $0 \leq i < j \leq n$, que se sigue de la interpretación que dimos para los d_j.

Realización geométrica

Misma fórmula: $|X_\bullet| = \left(\coprod_{n\geq 0} X_n \times \Delta^n\right) / \sim$, donde $(x, \iota_j(p)) \sim (d_j(x), p)$ para $x \in X_n$, $p \in \Delta^{n-1}$.

$E(2, G)$

Sea G un grupo topológico.
Definimos un espacio simplicial $E_\bullet(2, G)$ con

$$E_n(2, G) = \{(g_0, \ldots, g_n) : \{g_0, \ldots, g_n\} \text{ es afínmente conmutativo}\}.$$

$E_n(2, G) \subseteq G^{n+1}$ y le damos la topología inducida como subespacio.
El vértice j de $(g_0, \ldots, g_n)$ es g_j y
$d_j(g_0, \ldots, g_n) = (g_0, \ldots, g_{j-1}, g_{j+1}, \ldots, g_n)$.
(Hice mucha alharaca de que en los espacios simpliciales un simplejo no tiene por qué estar determinado por sus vértices, pero en $E_\bullet(2, G)$ sí lo están).
El espacio $E(2, G)$ es la realización geométrica de $E_\bullet(2, G)$.
(La definición original de Adem, F. Cohen y Torres Giese es ligeramente diferente, pero isomorfa a esta).

¿Qué se sabe de estos espacios?

- ¡No mucho!
- Si G es abeliano, $E(2, G) = EG$ es contráctil.
- Si G es discreto, $E(2, G)$ es homotópicamente equivalente al complejo de conmutatividad afín de G.
- Sobre todo no sabemos mucho para grupos tópologicos arbitrarios, nos concentramos en grupos de Lie compactos.
- Hay una variante $E(2, G)_1$ que resulta de tomar en $E_n(2, G)$ la componente conexa $E_n(2, G)_1$ de $(1, \dots, 1)$. Ese es más tratable, al menos en términos de cohomología racional:

Teorema (Adem y Gómez)

Si G es un grupo de Lie compacto y conexo, $E(2, G)_1$ tiene el tipo de homotopía de un complejo CW con un número finito de celdas y $H^*(E(2, G)_1, \mathbb{Q})) \cong (H^*(G/T; \mathbb{Q}) \otimes H^*(G/T; \mathbb{Q}))^W$, donde T es un toro maximal en G y $W = N_G(T)/T$ es el correspondiente grupo de Weyl.

¿Cálculos concretos del tipo de homotopía de $E(2, G)$?

¡Hay muy pocos!

Teorema (Okay)

Si G es un grupo extraespecial de orden 32, entonces $\pi_1(E(2, G)) = \mathbb{Z}/2$ y el cubriente universal de $E(2, G)$ es homotópicamente equivalente a $\bigvee^{151} S^2$. Así, por ejemplo, $\pi_2(E(2, G)) \cong \mathbb{Z}^{151}$, y $\pi_3(E(2, G)) \cong \mathbb{Z}^{11476}$. (!)

Teorema (Gritschacher)

$E(2, U) \simeq BU \times BU\langle 6\rangle \times BU\langle 8\rangle \times \cdots$, donde $BU\langle 2n\rangle$ es el cubriente $(2n-1)$-conexo de BU. Así, $\pi_{2n}(E(2, U)) = \mathbb{Z}^{n-1}$ y $\pi_{2n+1}(E(2, U)) = 0$.

Teorema (A., Gritschacher, Villarreal)

$E(2, O(2)) \simeq S^3 \vee S^2 \vee S^2$ y $E(2, SU(2)) \simeq S^4 \vee \Sigma^4\mathbb{RP}^2$. Así, por ejemplo, $\pi_{10}(E(2, SU(2))) = \mathbb{Z}/4 \oplus (\mathbb{Z}/24)^2$ y $\pi_{10}(E(2, O(2))) = \mathbb{Z}^{308} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{215} \oplus (\mathbb{Z}/3)^4 \oplus (\mathbb{Z}/15)^4 \oplus (\mathbb{Z}/24)^{34}$

Mapa conmutador

Una gran ventaja de la definición que les dí de $E(2, G)$ comparada con la original, isomorfa pero un poco distinta, es que sugiere definir el siguiente morfismo simplicial:

$$\mathfrak{c}_\bullet : E_\bullet(2, G) \to B_\bullet[G, G]$$
$$\mathfrak{c}_n(g_0, g_1 \ldots, g_n) = ([g_0, g_1], [g_1, g_2], \ldots, [g_{n-1}, g_n])$$

A la realización geométrica, le llamamos el mapa conmutador $\mathfrak{c} : E(2, G) \to B[G, G]$.
Cuando G es discreto, $\mathfrak{c}$ induce el homomorfismo $c : \pi_1(E(2, G)) \to [G, G]$ dado por $c(x_{gh}) = [g, h]$ que usamos antes.
La existencia de $\mathfrak{c}$ es un poco milagrosa. El espacio $E(2, G)$ se llama así porque es parte de una familia $E(q, G)$ definida en términos de subgrupos de índice de nilpotencia menor que q. Para $q > 2$ no sé definir nada análogo a $\mathfrak{c}$.

El Teorema principal

Teorema (A., Gritschacher, Villarreal)

Para un grupo compacto de Lie las siguientes son equivalentes:

- G *es abeliano*
- $E(2, G)$ *es contráctil.*
- $\mathfrak{c} : E(2, G) \to B[G, G]$ *es nulhomotópica.*
- $\pi_k(E(2, G)) = 0$ *para* $k = 1, 2, 4$.

Grupos homotópicamente abelianos

Para grupos de Lie compactos y conexos, la implicación «c
nulhomotópica $\implies$ G es abeliano», es consecuencia de un teorema clásico de Araki, James y Thomas:

Teorema (Araki, James, Thomas)

Si G es un grupo de Lie compacto y conexo, y el conmutador algebraico $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto [g, h]$ es nulhomotópico, entonces G es un toro.

Su prueba depende de la clasificación de grupos de Lie.
Advertencia: ¡Esto es falso para grupos disconexos! El grupo $G = (S^1 \times Q_8)/D$ donde $D = \langle(-1, -1)\rangle \leq S^1 \times Q_8$ es homotópicamente abeliano, más no abeliano. En efecto, $[G, G] = (1, \pm 1) \pmod{D} = (\mp 1, 1) \pmod{D}$. Así que $[G, G]$ está contenido en la imagen de $S^1 \times \{1\}$ en G, que es $\cong S^1$ y conexo por trayectorias.

$\mathfrak{c}$ nulhomotópica $\implies$ G es abeliano

Si $X_\bullet$ es un espacio simplicial, podemos tomar una realización truncada, $F_N|X_\bullet|$, dada por la imagen de $\coprod_{n=0}^{N} X_n \times \Delta^n$ en $|X_\bullet|$.
Tenemos un cuadro conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma G \wedge G \arrow[r, equal] & F_1 E(2, G) \arrow[r, "F_1 \mathfrak{c}"] \arrow[d] & F_1 B[G, G] \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Sigma[G, G] \\
& E(2, G) \arrow[r, "\mathfrak{c}"] & B[G, G] &
\end{tikzcd}$$

La composición horizontal superior es la suspensión del mapa $G \wedge G \to G$, $g \wedge h \mapsto [g, h]$.
Si $\mathfrak{c}$ es nulhomotópica, también es nulhomotópica la composición $\Sigma G \wedge G \to B[G, G]$, y por lo tanto su adjunta $G \wedge G \to [G, G] \simeq \Omega B[G, G]$.
Como el conmutador $G \times G \to G$ se factoriza a través de $G \wedge G$, también el conmutador es nulhomotópico, y por el teorema de Araki, James y Thomas deducimos que G es un toro.

Bosquejo de la prueba

- $\Omega\mathfrak{c} : \Omega E(2, SU(2)) \to SU(2)$ tiene una sección.
- Si $\pi_4(E(2, G)) = 0$, entonces la componente G_0 de la identidad en G es un toro.
  Este paso usa que para cualquier grupo de Lie simple y simplemente conexo K existe un homomorfismo $SU(2) \hookrightarrow K$ que induce un isomorfismo en π_3.
- Si G_0 es un toro y $E(2, G)$ es 2-conexo, entonces el mapa conmutador $\mathfrak{c} : E(2, G) \to B[G, G]$ es nulhomotópico.
  $[G, G] \subset G_0$ también es un toro, digamos de rango r, y mapas así corresponden a clases en $H^2(E(2, G); \mathbb{Z}^r) = 0$.