Espacios de Thom desde el punto de vista categórico

Omar Antolín Camarena

24 de octubre, 2018

Enunciado del isomorfismo de Thom

Haces vectoriales

Sea $\rho : E \to X$ un *haz vectorial* real de rango n.
Para cada $x \in X$, la fibra $\rho^{-1}(x)$ es un espacio vectorial real de dimensión n y éstos espacios «varían de manera continua».

Espacio de Thom

El espacio de Thom de ρ es $M\rho := E^+/s_\infty(X)$, donde E^+ se obtiene compactificando cada fibra de ρ agregando un punto «al infinito», y $s_\infty(X)$ consta de todos los puntos agregados.

Isomorfismo de Thom

- Siempre: $H_k(X; \mathbb{F}_2) \cong \tilde{H}_{k+n}(M\rho; \mathbb{F}_2)$
- Cuando el haz es *orientable*: $H_k(X; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_{k+n}(M\rho; \mathbb{Z})$

Nuestra estrategia para demostrarlo

- La clave del asunto es expresar el espacio de Thom como el colímite homotópico de un diagrama cuya forma es X. Esto es una idea de ABGHR: Matt Ando, Andrew Blumberg, David Gepner, Mike Hopkins y Charles Rezk.
- Usualmente las formas de los diagramas estan dadas por categorías, no espacios (!), así que tendremos bastante que explicar.
- También traduciremos la noción de orientación al lenguaje categórico. La esperanza es que al tener todo expresado del modo correcto el resultado se vuelva obvio.
- Primero hablaremos un poco de las herramientas que usaremos:
  - Colímites homotópicos
  - La teoría de ∞-categorías
  - Espectros

¿Qué problema resuelven los colímites homotópicos?

Recordatorio sobre el coproducto amalgamado

Dado un diagrama $Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} Z$, el coproducto amalagamado es $Y \sqcup_X Z := (Y \sqcup Z)/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $f(x) \sim g(x)$ para toda $x \in X$.

Los colímites usuales *no son homotópicamente invariantes*

$$
\begin{tikzcd}
D^{n+1} \arrow[d] & S^n \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & D^{n+1} \arrow[d] \\
\mathrm{pt} & S^n \arrow[l] \arrow[r] & \mathrm{pt}
\end{tikzcd}
$$

Aquí vemos una equivalencia homotópica natural entre dos diagramas (los renglones), pero los coproductos amalgamados de los renglones son S^{n+1} y pt, respectivamente.

Los colímites homotópicos son una «corrección» de los colímites para volverlos homotópicamente invariantes.

Ejemplos de colímites homotópicos

Coproductos amalgamados homotópicos

El coproducto amalgamado homotópico, $Y \sqcup_X^h Z$, de $Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} Z$ es el cociente de $Y \sqcup (X \times [0,1]) \sqcup Z$ donde, para toda $x \in X$, identificamos $f(x) \sim (x,0)$ y $(x,1) \sim g(x)$.
Por ejemplo, $\mathrm{pt} \sqcup_X^h \mathrm{pt} \simeq \Sigma X$.

Telescopios

El colímite homotópico de un diagrama $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$ se puede construir como el cociente $\coprod_{n \geq 1} X_n \times [0,1]$ donde para toda $n \geq 1$ y toda $x \in X_n$, identificamos $(x,n) \sim (f_n(x), n+1)$.

Colímites homotópicos en general

La filosofía

En estos ejemplos simples, la diferencia entre la versión homotópica de un colímite y la usual es que en lugar de *identificar puntos*, *conectamos con trayectorias* los puntos que hubiéramos identificado. En general sucede algo del mismo estilo, pero más complicado: también pegamos celdas de dimensión superior para «identificar identificaciones».

Hay una fórmula

El colímite homotópico de un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Top}$, $\operatorname{hocolim} F$, es un cierto cociente de $\coprod_{c \in \mathcal{C}} F(c) \times |N(c/\mathcal{C})|$. No necesitaremos los detalles.

Lo bueno y lo malo

Ventajas

- Una equivalencia homotópica natural entre diagramas sí induce una equivalencia homotópica entre los colímites homotópicos.
- Hay muchas herramientas de cálculo para colímites homotópicos (que usualmente no valen para colímites usuales, excepto cuando coinciden con los homotópicos): el teorema de Seifert-van Kampen, sucesiones de Mayer-Vietoris, varias sucesiones espectrales, etc.

Desventajas

- Queremos pensar en hocolim F como definido solo salvo equivalencia homotópica, pero entonces, ¡no puede estar caracterizado por una propiedad universal en Top!
- No son suficientemente generales, como veremos a continuación.

La construcción de Borel

Para lo que queremos usar los colímites homotópicos lo que hemos discutido hasta ahora no es suficientemente general.

Definición

Sea G un grupo topológico que actúa sobre un espacio X. La construcción de Borel de la acción es $X_{hG} := (X \times EG)/G$, el espacio de órbitas de la acción diagonal de G en $G \times EG$.

Para G discreto, X_{hG} es un colímite homotópico

Denotemos con $\mathcal{B}G$ a G pensado como categoría de un solo objeto; la acción sobre X se puede ver como un functor $F : \mathcal{B}G \to \mathrm{Top}$ y es fácil ver que hocolim $F \simeq X_{hG}$.
Si G no es discreto, quisiéramos hacer lo mismo pero usando el espacio clasificante BG como forma del diagrama F...

Lo que necesitan saber de ∞-categorías

Su definición es simple

Una ∞-categoría es un conjunto simplicial $\mathcal{C}$ tal que cualquier morfismo $\Lambda^n_k \to \mathcal{C}$ con $0 < k < n$ se puede extender a un morfismo $\Delta^n \to \mathcal{C}$.

Generalizan a las categorías y a los espacios

- Dada una categoría C, su *nervio* NC es una ∞-categoría.
- Un *complejo de Kan* es una ∞-categoría.
- Dado un espacio X, $\mathrm{Sing}(X)$ es un complejo de Kan.

Una categoría enriquecida en espacios define una ∞-categoría

Una ∞-categoría tiene objetos y espacios de morfismos

- Los objetos de $\mathcal{C}$ son sus vértices.
- $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, y) = \mathcal{C}^{\Delta^1} \times_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}} \{(x, y)\}$.

Otra vez, más informalmente

- Una ∞-categoría tiene objetos y espacios de morfismos entre ellos.
- Las categorías son aquellas ∞-categorías cuyos espacios de morfismos son discretos.
- Cualquier espacio X es una ∞-categoría cuyos
  - objetos son los puntos de X, y tal que
  - el espacio de morfismos de x a y es el espacio de trayectorias de x a y en X.

  De hecho, como las trayectorias se pueden recorrer en sentido contrario, todos los morfismos en X son invertibles y X es un ∞-grupoide.

La teoría de ∞-categorías

Mucho de la teoría de categorías se generaliza a ∞-categorías, con un «sabor homotópico».
Ejemplos:

- $c \in \mathcal{C}$ es inicial si para toda $d \in C$, $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(c, d)$ es *contraíble*.
- $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es adjunto izquierdo de $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ si hay una *equivalencia homotópica natural*:

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{D}}(F(c), d) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(c, G(d)).$$

- Los límites y colímites se pueden definir como conos finales y coconos iniciales, pero «final» e «inicial» son sus versiones homotópicas.

La ∞-categoría de espacios, $\mathcal{S}$

En la teoría de ∞-categorías, $\mathcal{S}$ juega el papel que jugaba Set en la teoría de categorías. $\mathcal{S}$ tiene:

Objetos Espacios (digamos, complejos CW)

Morfismos Los espacios de morfismos son espacios de funciones continuas (con la topología compacto-abierta)

No confundir $\mathcal{S}$ con Top

Si pensamos a Top como ∞-categoría, sus espacios de morfismos son los conjuntos de funciones continuas *dotados de la topología discreta*.

Concepto	En Top	En $\mathcal{S}$
Objeto terminal	un punto	espacio contraíble
Isomorfismo	homeomorfismo	equivalencia homotópica
Colímite	colímite «usual»	colímite homotópico

Colímites de funtores constantes

El funtor constante c_T con valor T envía todos los objetos a T y a todos los morfismos a la identidad en T. ¿Cómo se calcula el colímite de c_T?
Como calentamiento tomemos $T = \mathrm{pt}$.

- En teoría de categorías ordinaria, para $c_{\mathrm{pt}} : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$, tenemos $\operatorname{colim} c_{\mathrm{pt}} \cong \pi_0(\mathcal{C})$.
- Pasando a ∞-categorías, para $c_{\mathrm{pt}} : X \to \mathcal{S}$ con X un espacio, ¡tenemos $\operatorname{colim} c_{\mathrm{pt}} \simeq X$! Más generalmente, para $c_{\mathrm{pt}} : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ con $\mathcal{C}$ una ∞-categoría, $\operatorname{colim} c_{\mathrm{pt}} \simeq B\mathcal{C}$ donde el espacio clasificante $B\mathcal{C}$ se puede pensar como $\mathrm{Sing}(|\mathcal{C}|)$.

Para T arbitrario, solo multiplicamos por T:
$\operatorname{colim} c_T \simeq T \times \operatorname{colim} c_{\mathrm{pt}}$.

Una equivalencia sorprendente: $\mathcal{S}/X \simeq \mathrm{Fun}(X, \mathcal{S})$

Ida

Dada una aplicación $f : Y \to X$, podemos construir un funtor $\tilde{f} : X \to \mathcal{S}$ dado como sigue en...

Objetos $\tilde{f}(x) := \{(y, \gamma) \in Y \times X^{[0,1]} : \gamma(0) = x, \gamma(1) = f(y)\}$. Este espacio se conoce como la fibra homotopica de f en x, $\mathrm{hofib}_x(f)$. Si f es fibración, $\mathrm{hofib}_x(f) \simeq f^{-1}(x)$.

Morfismos $\tilde{f} : \mathrm{Map}_X(x, x') \to \mathrm{Map}_{\mathcal{S}}(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x'))$ dada por $\alpha \mapsto ((y, \gamma) \mapsto (y, \alpha \cdot \gamma))$

Vuelta

Podemos recuperar Y y f a partir de $\tilde{f}$:

- $Y \simeq \mathrm{hocolim}\, \tilde{f}$.
- Hay una única transformación natural de $\tilde{f}$ al funtor constante con valor pt, tomando colímites recuperamos $f : Y \simeq \mathrm{hocolim}_{x \in X} \tilde{f}(x) \to \mathrm{hocolim}_{x \in X} \mathrm{pt} \simeq X$.

Aplicaciones clasificantes de haces vectoriales

Sea $\rho : E \to X$ un *haz vectorial* real de rango n; está clasificada por una aplicación $f : X \to BGL_n\mathbb{R}$.
Podemos pensar a $BGL_n\mathbb{R}$ como la ∞-categoría con:

Objetos Espacios vectoriales reales de dimensión n.

Morfismos Isomorfismos de espacios vectoriales (topologizados como $GL_n\mathbb{R}$).

Así, ¡f le asocia a cada punto de X un espacio vectorial de dimensión n y a cada trayectoria en X un isomorfismo lineal!

Esto es lo que siempre quisimos que fuera un haz vectorial.

El espacio de Thom

- Formamos E^+, el haz fibrado con fibra S^n que se obtiene tomando la compatificación a un punto de cada fibra. ¿Cómo lo describimos en términos de $f : X \to BGL_n\mathbb{R}$?
- Hay un funtor de $(-)^+ : BGL_n\mathbb{R} \to \mathcal{S}$, dado por compactificación a un punto. Por la equivalencia sorprendente, $\operatorname{hocolim} f^+ \simeq E^+$.
- Podemos promover a $(-)^+$: tomando el punto agregado al infinito como punto base, podemos decir que el funtor cae en $\mathcal{S}_\bullet$, la ∞-categoría de espacios basados.
- Para calcular colímites en $\mathcal{S}_\bullet$ tomamos primero el colímite en $\mathcal{S}$ y luego colapsamos el colímite de los puros puntos base (piensen, por ejemplo, en $\sqcup$ vs $\vee$), así que:

$$\operatorname{hocolim}_\bullet f^+ \simeq E^+/s_\infty(X) = M\rho$$

Lo que necesitan saber sobre espectros

Su definición es simple

Un espectro consta de una sucesión de espacios E_n basados y aplicaciones basadas $\sigma_n : \Sigma E_n \to E_{n+1}$ (equivalentemente, $\sigma_n^\dagger : E_n \to \Omega E_{n+1}$).

Tienen su propia teoría de homotopía llamada estable

Hay nociones de morfismo, homotopía de morfismos, equivalencia homotópica, grupos de homotopía, fibra homotópica, suspensión, etc.

Forman una ∞-categoría $\mathcal{S}p$

Hay un functor $\Sigma^\infty : \mathcal{S}_\bullet \to \mathcal{S}p$ que envía a un espacio X al espectro con n-ésimo espacio $\Sigma^n X$ y con todos los σ_n iguales a la identidad.

El adjunto derecho de Σ^∞ manda a un espectro $X = \{(X_n, \sigma_n)\}$ a su espacio infinito de lazos: $\Omega^\infty X = \operatorname{hocolim}_{n\to\infty} \Omega^n X_n$.

Espectros, homología y cohomología

El producto «smash» y el espectro de mapas

Hay un producto smash de espectros que generaliza el de espacios en el sentido de que $\Sigma^\infty X \wedge \Sigma^\infty Y \simeq \Sigma^\infty(X \wedge Y)$. La unidad es el espectro esfera, $S := \Sigma^\infty S^0$. El producto tiene un «hom interno», $\mathrm{Map}(E, F)$, que además de la adjunción usual, cumple $\Omega^\infty \mathrm{Map}(E, F) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{S}p}(E, F)$.

Los grupos de homotopía de un espectro

Definimos $\pi_n E = \mathrm{colim}_{k\to\infty} \pi_{n+k}(E_k)$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Alternativamente, $\pi_n(E) = \pi_{n+k}\mathrm{Map}_{\mathcal{S}p}(S, \Sigma^k E)$ para $k \geq -n$.

Un espectro produce teorías de homología y cohomología

- $\tilde{E}_n(X) := \pi_n(E \wedge \Sigma^\infty X)$, $E_n(X) := \tilde{E}_n(X \sqcup pt)$.
- $\tilde{E}^n(X) := \pi_{-n}\mathrm{Map}(\Sigma^\infty X, E)$, o sea que una clase de cohomología aquí está representada por una clase de homotopía de morfismos $\Sigma^\infty X \to \Sigma^n E$.

Espectros de Eilenberg-MacLane

Definición

Dado un grupo abeliano A, el espectro de Eilenberg-MacLane HA tiene como n-ésimo espacio $K(A, n)$ y como $\sigma_n^\dagger : K(A, n) \to \Omega K(A, n+1)$ la equivalencia homotópica canónica.
La homología y cohomología asociadas a HA son las ordinarias o singulares.
Los grupos de homotopía son $\pi_0(HA) = A$ y $\pi_n(HA) = 0$ para $n \neq 0$.

Anillos, módulos

Cuando A es un anillo conmutativo, HA es un espectro anillo E_∞ y hay una ∞-categoría de HA-módulos cuya categoría homotópica es la categoría derivada del anillo A.
El funtor $\mathcal{S}p \to \mathrm{Mod}_{HA}$ dado por $E \mapsto HA \wedge E$ es el funtor de HA-módulo libre, el adjunto izquierdo al funtor olvidadizo $\mathrm{Mod}_{HA} \to \mathcal{S}p$.

Tres formas de ver orientaciones

Clase de Thom

Sea $\rho : E \to X$ un haz vectorial real de rango n.
Una clase de Thom para el haz es una clase de cohomología $\theta \in H^n(M\rho; \mathbb{Z})$ tal que para cualquier punto $x \in X$, el morfismo inducido por la inclusión $\rho^{-1}(x)^+ \hookrightarrow M\rho$ manda a ρ a un generador de $H^n(\rho^{-1}(x)^+; \mathbb{Z}) \cong H^n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Factorización de la aplicación clasificante

Sea $f : X \to BGL_n\mathbb{R}$ la aplicación clasificante de un haz.
Una orientación para el haz clasificado se puede especificar dando una factorización $X \to BSL_n\mathbb{R} \to BGL_n\mathbb{R}$ salvo homotopía.

Equivalencia con el funtor constante

También podemos describir orientaciones como equivalencias homotópicas naturales entre $H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^\infty f^+ : X \to \mathrm{Mod}_{H\mathbb{Z}}$ y el funtor constante con valor $H\mathbb{Z}$.

La primer clase de Stiefel-Whitney

- De la sucesión exacta corta $1 \to SL_n\mathbb{R} \to GL_n\mathbb{R} \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^\times \to 1$, vemos que $BSL_n\mathbb{R}$ es la fibra homotópica de $B\det : BGL_n\mathbb{R} \to B\mathbb{R}^\times$.
- La propiedad universal de la fibra homotópica nos dice que dar una factorización de la aplicación clasificante de una haz a través de $BSL_n\mathbb{R}$ es equivalente a dar una homotopía de $B\det \circ f : BGL_n\mathbb{R} \to B\mathbb{R}^\times$ con una constante.
- Como $R^\times \simeq O(1)$, $BR^\times \simeq BO(1) \simeq \mathbb{RP}^\infty \simeq K(\mathbb{Z}/2, 1)$. La composición $B\det \circ f : BGL_n\mathbb{R} \to K(\mathbb{Z}/2, 1)$ corresponde a la primer clase de Stiefel-Whitney del haz, $w_1(\rho)$.
- Por lo tanto, ρ es orientable si y sólo si $w_1(\rho) = 0$.

Equivalencia de la factorización con la constancia del funtor

- El funtor $H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^\infty f^+ : X \to \mathrm{Mod}_{H\mathbb{Z}}$ naturalmente cae en la subcategoría $B\mathrm{Aut}(\Sigma^n H\mathbb{Z})$ de $\mathrm{Mod}_{H\mathbb{Z}}$: todos los valores del funtor son $\Sigma^n H\mathbb{Z}$, y como X es ∞-grupoide, la imagen contiene solo automorfismos.
- $B\mathrm{Aut}(\Sigma^n H\mathbb{Z}) \simeq BO(1)$: las autoequivalencias de $H\mathbb{Z}$ son solo $\pm id$ (la suspensión no importa).
- Vimos que la factorización era equivalente a dar una homotopía nula de la composición $X \to BGL_n\mathbb{R} \to BO(1)$, pero eso nos da una homotopía entre $H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^\infty f^+$ y el funtor constante $c_{\Sigma^n H\mathbb{Z}}$.

Equivalencia de la clase de Thom con la constancia del funtor

- Podemos ver a una clase de Thom $\theta \in H^n(M\rho; \mathbb{Z})$, como un morfismo $\Sigma^\infty M\rho \to \Sigma^n H\mathbb{Z}$.
- Como $\Sigma^\infty M\rho \simeq \operatorname{hocolim} \Sigma^\infty f^+$, esto es equivalente a un cocono sobre el diagrama $\Sigma^\infty f^+ : X \to \mathcal{S}p$ con vértice $\Sigma^n H\mathbb{Z}$.
- Por la adjunción en la que participa $H\mathbb{Z} \wedge (-) : \mathcal{S}p \to \mathrm{Mod}_{H\mathbb{Z}}$, esto es lo mismo que un cocono sobre el diagrama $H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^\infty f^+ : X \to \mathrm{Mod}_{H\mathbb{Z}}$ con vértice $\Sigma^n H\mathbb{Z}$.
- La condición en la definición de clase de Thom de que la inclusión $\rho^{-1}(x)^+ \hookrightarrow M\rho$ mande θ a un generador, es equivalente a que las componentes del cocono hacia el vértice sean equivalencias.
- Un cocono es lo mismo que una transformación natural hacia el funtor constante; si las componentes del cocono hacia el vértice son equivalencias, la transformación natural es una equivalencia.

Juntando todo

- Supongamos que el haz ρ clasificado por $f : X \to BGL_n\mathbb{R}$ es orientable.
- Entonces $H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^\infty f^+ : X \to \mathrm{Mod}_{H\mathbb{Z}}$ es equivalente a $c_{\Sigma^n H\mathbb{Z}} = H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^\infty c_{S^n}$.
- Como $H\mathbb{Z} \wedge (-) : \mathcal{S}p \to \mathrm{Mod}_{H\mathbb{Z}}$ y $\Sigma^\infty : \mathcal{S}_\bullet \to \mathcal{S}p$ son ambos adjuntos izquierdos, preservan colímites.
- Por lo tanto,

  $$\mathrm{colim}(H\mathbb{Z}\wedge\Sigma^\infty f^+) \simeq H\mathbb{Z}\wedge\Sigma^\infty \,\mathrm{hocolim}_\bullet\, f^+ \simeq H\mathbb{Z}\wedge\Sigma^\infty M\rho, \text{ y}$$

  $$\mathrm{colim}\, c_{\Sigma^n H\mathbb{Z}} \simeq H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^\infty \,\mathrm{hocolim}_\bullet\, c_{S^n} \simeq H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^\infty (S^n \wedge X_+),$$

  son equivalentes.
- Tomando grupos de homotopía obtenemos el isomomorfismo de Thom.

Fin

¡Gracias!

Opcional: La categoría de elementos de un funtor

Esa equivalencia tiene un análogo familiar en teoría de categorías ordinaria.
Sea $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ un funtor. La categoría de elementos de F, denotada $\int F$, tiene:

- **Objetos** Elementos de valores de F: (x, c) con $x \in F(c)$.
- **Morfismos** Un $f : (x, c) \to (y, d)$ es simplemente un morfismo $f : c \to d$ en $\mathcal{C}$ tal que $F(f) : x \mapsto y$.

Opcional: Opfibraciones discretas

Hay un funtor $\pi : \int F \to \mathcal{C}$ dado en objetos por $(x, c) \mapsto c$, y en morfismos, por $(x, c) \xrightarrow{f} (y, d) \mapsto c \xrightarrow{f} d$.
La proyeccion π tiene una propiedad de levantamiento similar a la de los espacios cubrientes:

- Dado $c \xrightarrow{f} d \in \mathcal{C}$ y dada una preimagen de c, digamos (x, c), existe un único levantamiento de f que empieza en (x, c) —a saber, $(x, c) \xrightarrow{f} (f(x), d)$.

Podemos recuperar a F a partir de π: en objetos, $F(c) = \pi^{-1}(c)$; en morfismos, usamos la propiedad de levantamiento para definir F.

Opcional: Colímites

Fórmula

El colímite de $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ se puede calcular con la siguiente «fórmula»:

$$\operatorname{colim} F = \left(\coprod_{c \in C} F(c) \right) / \sim,$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada al declarar que para cualquier $f : c \to d$ en $\mathcal{C}$, y cualquier $x \in F(c)$, $x \sim F(f)(x)$.

En términos de $\int F$

Pensemos en $\int F$ como *gráfica*:

- $\coprod_{c \in C} F(c) \cong \{(x, c) : c \in \mathcal{C}, x \in F(c)\}$ son los *vértices* de $\int F$.
- $x \sim y \iff$ *hay una trayectoria (no dirigida) de x a y.*
- Por lo tanto, $\operatorname{colim} F = \pi_0(\int F)$.

Opcional: La construcción de Grothendieck

Dado un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Cat}$, hay una categoría $\int F$ con:

Objetos (x, c) con $c \in \mathcal{C}$ y x objeto de $F(c)$.

Morfismos un morfismo $(x, c) \to (y, d)$ es un par (f, g) con $f : c \to d$ en $\mathcal{C}$ y $g : F(f)(x) \to y$ en la categoría $F(d)$.

Composición $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ F(f)(g'))$.

Un conjunto se puede pensar como una categoría donde todos los morfismos son identidades. La construcción de Grothendieck generaliza a la categoría de elementos.

Ejemplo

Para un grupo G, denotemos con $\mathcal{B}G$ a la categoría de un solo objeto con morfismos G; y un homomorfismo $\phi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ lo podemos pensar como funtor $\Phi : \mathcal{B}G \to \mathcal{B}\mathrm{Aut}(h) \hookrightarrow \mathsf{Cat}$. Tenemos que $\int \Phi \cong \mathcal{B}(H \rtimes_\phi G)$.

Opcional: El teorema de Thomason

El espacio clasificante $B\mathcal{C}$ de una categoría $\mathcal{C}$ se forma tomando un simplejo de dimensión n por cada n-ada $c_0 \xrightarrow{f_0} c_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} c_n$ de morfismos «componibles» en $\mathcal{C}$ y haciendo las identificaciones obvias (ver dibujo).
(Esto es la *realización geométrica* del *nervio* de $\mathcal{C}$.)
Dado $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Cat}$,

$$\operatorname*{hocolim}_{c \in C} BF(c) \simeq B(\textstyle\int F)$$

Ejemplo, parte II

El espacio clasificante de un producto semidirecto es la construcción de Borel de la acción del cociente sobre el espacio clasificante del subgrupo normal.

$$B(H \rtimes_\phi G) \simeq B(\textstyle\int \Phi) \simeq \operatorname{hocolim} B \circ \Phi \simeq (BH \times EG)/G$$