Extensiones de grupos desde el punto de vista categórico

Omar Antolín Camarena

14 de abril de 2021

¿Qué son las extensiones de grupo?

Dados dos grupos N y Q, una extensión de Q por N es una sucesión exacta corta $1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \to 1$.

- $i : N \to E$ es un homomorfismo inyectivo.
- $q : E \to Q$ es un homomorfismo suprayectivo.
- La imagen de i coincide con el núcleo de q.

«N es un subgrupo Normal de E y Q es el Qociente.»

E está en biyección con $N \times Q$ y la operación de grupo es de la forma $(n_1, q_1)(n_2, q_2) = (n_1\phi(q_1, n_2, q_2), q_1 q_2)$.

Ejemplo

Cuando sumas dos dígitos a veces «llevas uno».

$$0 \to \mathbb{Z}/10 \xrightarrow{\times 10} \mathbb{Z}/100 \xrightarrow{\text{mod } 10} \mathbb{Z}/10 \to 0$$

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + a_2 + \ell, b_1 + b_2),$$

donde $\ell = 1$ si $b_1 + b_2 \geq 10$ y $\ell = 0$ si no.

Teoría de Schreier (1926)

- La teoría de Schreier permite clasificar todas las extensiones de Q por N. Es completamente explícita, pero complicada.
- Fijamos una extensión $1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \to 1$.
- Escogemos un $s(q) \in p^{-1}(q)$ para cada $q \in Q$.
- La función $s : Q \to E$ es una *sección* de $p : E \to Q$.
- Advertencia: $s : Q \to E$ no es un homomorfismo de grupos.
- $N \times Q \to E$ dada por $(n, q) \mapsto i(n)s(q)$ es una biyección con inversa $e \mapsto (i^{-1}(e \cdot s(p(e))^{-1}), s(p(e)))$.
- La multiplicación está dada por:

$$\begin{aligned}
(n_1, q_1)(n_2, q_2) &= i(n_1)s(q_1)i(n_2)s(q_2) \\
&= i(n_1)\Big(s(q_1)i(n_2)s(q_2)s(q_1q_2)^{-1}\Big)s(q_1q_2) \\
&=: (n_1\phi(q_1, n_2, q_2), q_1q_2)
\end{aligned}$$

- ¿Qué propiedades debe cumplir ϕ para que esa sea la multiplicación de un grupo?
- ¿Cuándo dos ϕ dan extensiones isomorfas?

Idea: tratar al grupo geométricamente como haz

Para deducir los resultados de la teoría de Schreier de una manera fácil de recordar y de entender, vamos a tratar a $E \to Q$ como una especie de haz con fibra N.

Clasificar extensiones es análogo al problema geométrico de clasificar haces con base Q y fibra N.

Vamos a necesitar objetos «geométricos» que sustituyan a Q y a N, una noción de haz para ellos y una forma de clasificar ese tipo de haces.

Antes, veamos algunos ejemplos de teorías de haces.

Haces vectoriales

Un haz vectorial sobre un espacio X es una función continua $p : E \to X$ tal que cada fibra $p^{-1}(x)$ tiene estructura de espacio vectorial real de alguna dimensión fija n.

- Hay un «espacio de todos los espacios vectoriales reales de dimensión n», denotado $BGL_n(\mathbb{R})$.
- Los puntos de este espacio corresponden a espacios vectoriales de dimensión n.
- Las clases de homotopía de trayectorias relativas a los extremos corresponden a isomorfismos lineales entre los espacios vectoriales de los extremos.
- Dado un haz $p : E \to X$, podemos definir la función $X \to BGL_n(\mathbb{R})$ dada por $q \mapsto p^{-1}(q)$.
- Esto induce una biyección entre clases de isomorfismo de haces vectoriales reales de dimensión n sobre X y clases de homotopía de funciones continuas $X \to BGL_n(\mathbb{R})$.

Espacios cubrientes I

Sea X un espacio conexo (y decente).

Un cubriente de X es una función continua $p : Y \to X$ tal que todas las fibras $p^{-1}(x)$ son subespacios discretos de Y de la misma cardinalidad.

- El homomorfismo inducido $p_* : \pi_1 Y \to \pi_1 X$ es inyectivo.
- Hay una biyección entre clases de isomorfismo de espacios cubrientes conexos de X y clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X)$ que envía cada cubriente $p : Y \to X$ al subgrupo $p_*(\pi_1(Y))$.
- (Hay una variante de la biyección: entre cubrientes conexos *basados* y subgrupos de $\pi_1(X)$).
- ¿Hay un espacio clasificante?

Categorías

Una categoría es como un grupo, pero no todos los elementos tienen inverso y la multiplicación no está definida para todas las parejas de elementos.

Una categoría consta de:

- una colección de objetos,
- una colección de morfismos cada uno con un dominio y un codominio que son objetos, y
- una operación de composición entre morfismos $f \circ g$ definida cuando el codominio de g es igual al dominio de f.

tales que la composición es asociativa y para cada objeto a hay un morfismo $\mathrm{id}_a : a \to a$ que es neutro para la composición.

Funtores

Un funtor $F : C \to D$ asocia:

- a cada objeto c de C un objeto $F(c)$ de D, y
- a cada $f : c_1 \to c_2$, un morfismo $F(f) : F(c_1) \to F(c_2)$;

de modo que $F(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F(c)}$ y $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Ejemplos de categorías

Grandes, del tamaño de un área de estudio de la matemática

- Grupos y homomorfismos de grupos
- Anillos y homomorfismos de anillos
- Espacios topológicos y funciones continuas
- Espacios topológicos y clases de homotopía de funciones continuas
- Categorías y funtores

Chicos, objetos individuales en algún área de estudio

- Dado un grupo G sea bG la categoría con un solo objeto objeto, con morfismos los elementos de G y con composición dada por la multiplicación del grupo.
- Dado un COPO $(X, \leq)$, hay una categoría cuyos objetos son los elementos de X y tal que no hay morfismos $x_1 \to x_2$ a menos que $x_1 \leq x_2$, en cuyo caso hay exactamente uno.

Grupoide fundamental

El grupoide fundamental de un espacio topológico X es una categoría $\pi_{\leq 1}(X)$ con:

objetos	los puntos de X
morfismos	clases de homotopía (relativa a los extremos) de trayectorias
composición	concatenación de trayectorias

Es un *grupoide*, una categoría donde todos los morfismos tienen inverso.

Reúne en un solo objeto la información de:

- las componentes conexas por trayectorias de X,
- y el grupo fundamental de cada una.

Espacios cubrientes II

Sea X un espacio decente y sea $p : Y \to X$ un cubriente.

No suponemos ni que X ni que Y es conexo; y permitimos que fibras sobre distintas componentes de X sean de distinta cardinalidad.

Podemos definir un funtor $P : \pi_{\leq 1}(X) \to$ Conjuntos como sigue:

- **objetos** $P(x) := p^{-1}(x)$, un conjunto.
- **morfismos** dada una trayectoria $\gamma : [0,1] \to X$, definimos una función $P(\gamma) : p^{-1}(\gamma(0)) \to p^{-1}(\gamma(1))$ de modo que $P(\gamma)(y)$ es el otro extremo del único levantamiento de γ a Y que empieza en y.

¡El cubriente se puede recuperar a partir de P! Por ejemplo $Y = \bigcup_{x \in X} P(x)$ (pero definir la topología es delicado).

Hay una biyección entre clases de isomorfismos de cubrientes sobre X y clases de isomorfismo de funtores $P : \pi_{\leq 1}(X) \to$ Conjuntos.

La construcción de Grothendieck I

Como paso intermedio a recuperar $p : Y \to X$ a partir de $P : \pi_{\leq 1}(X) \to \text{Conjuntos}$, expliquemos como recuperar el grupoide fundamental $\pi_{\leq 1}(Y)$:

objetos (x, y) donde $x \in X$, $y \in P(x)$.

morfismos para cada $\gamma : x_1 \to x_2$ y cada $y_1 \in P(x_1)$, hay un morfismo $y_1 \xrightarrow{\gamma} P(\gamma)(y_1)$.

composición $y_1 \xrightarrow{\gamma} P(\gamma)(y_1) \xrightarrow{\lambda} P(\lambda)(P(\gamma)(y_1))$ es igual a $y_1 \xrightarrow{\lambda \circ \gamma} P(\lambda \circ \gamma)(y_1)$.

Esto se puede hacer más generalmente para cualquier categoría C y cualquier funtor $P : C \to \text{Conjuntos}$ obteniendo una categoría D y un funtor $p : D \to C$ con la propiedad de levantamiento *único* de morfismos.

Esos funtores se conocen (desafortunadamente) como *opfibraciones discretas* y hay una equivalencia de categorías:

$$\text{Fun}(C, \text{Conjuntos}) \simeq \text{OpFib}^{disc}(C).$$

Esto no basta para clasificar extensiones de grupos

Recuerden el plan:

> *Clasificar extensiones* $1 \to N \to E \to Q \to 1$ *pensando en* $p : E \to Q$ *como una especie de haz, quizá cambiando los grupos por avatares «geométricos».*

Podemos intentar reemplazar los grupos por categorías de un solo objeto; los homomorfismos se vuelven funtores: $p : bE \to bQ$.

Si p fuera una opfibración discreta, correspondería a algún funtor $bQ \to$ Conjuntos.

Pero los levantamientos de morfismos bajo p no son únicos: cada uno tiene $|N|$ preimágenes.

Peor aún: la preimagen $p^{-1}(\circlearrowleft^{\mathrm{id}})$ no es un vil conjunto, sino bN.

Necesitamos algo más general que opfibraciones discretas y funtores a la categoría de conjuntos.

Generalizando la construcción de Grothendieck

Para permitir fibras que tengan morfismos no identidad podemos tomar funtores $P : C \to \mathrm{Cat}$ a la categoría de funtores.

Intentemos repetir la construcción de Grothendieck en este contexto más general:

- Empezamos por $D_0 = \coprod_{c \in C} P(c)$.
- Agregamos morfismos como antes: para cada $f : c_1 \to c_2$ y cada objeto $d_1 \in P(C_1)$, agregamos un morfismo $d_1 \xrightarrow{f} P(f)(c_1)$, y declaramos que estos se componen como antes.

Esta vez no hemos terminado porque faltan algunas composiciones por definir: debemos poder componer los morfismos de tipo $d_1 \xrightarrow{f} P(f)(c_1)$ con morfismos en $P(c_1)$ y $P(c_2)$.

Resulta que esas composiciones son las únicas que faltan agregar.

La construcción de Grothendieck II

Dado un funtor $P : C \to \mathrm{Cat}$, construimos una categoría D con:

objetos (c, d) con $c \in C$, $d \in P(c)$.

morfismos un morfismo $(c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$ es un par (f, g) tal que $f : c_1 \to c_2$ en C y $g : P(f)(d_1) \to d_2$ en la categoría $P(c_2)$.

composición $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ P(f)(g'))$.

Hay un funtor obvio $p : D \to C$, dado por $p(c, d) = c$, $p(f, g) = f$.

Este funtor no tiene levantamientos únicos de morfismos pero es lo que se llama una *opfibración de Grothendieck* o una *fibración cocartesiana*.

Ejemplo: los productos semidirectos

Recordemos que para cada grupo G tenemos la correspondiente categoría de un solo objeto bG.

Un funtor $bG \to \mathrm{Cat}$ corresponde a una categoría con una acción de G.

Si tenemos un homomorfismo $\phi : G \to \mathrm{Aut}(N)$, tenemos una acción de G sobre N por homomorfismos de grupo, o equivalente una acción de G sobre bN por funtores.

Es decir que ϕ induce un funtor $b\phi : bG \to \mathrm{Cat}$ que envía:

- el único objeto de bG a la categoría bN, y
- un morfismo g de bG al funtor $b\phi(g) : bN \to bN$ que corresponde al automorfismo $\phi(g) : N \to N$.

Ejercicio

La construcción de Grothendieck de $b\phi$ es la categoría $b(N \rtimes_\phi G)$.

Opfibraciones de Grothendieck

Sea $p : D \to C$ un funtor.

Un morfismo $f : d_1 \to d_2$ se llama *p-cocartesiano* si dados cualesquiera $g : d_1 \to d_2$ y $\eta : p(d_2) \to p(d_3)$ tal que $p(g) = \eta \circ p(f)$, existe un único $h : d_2 \to d_3$ con $p(h) = \eta$ y $g = h \circ f$.

El funtor p es una *opfibración de Grothendieck* si dado cualquier $\phi : c_1 \to c_2$ y cualquier d_1 con $p(d_1)$, existe al menos un morfismo cocartesiano con dominio d_1, digamos $f : d_1 \to d_2$, con $p(f) = \phi$.

La construcción de Grothendieck aplicada a un funtor $C \to \mathrm{Cat}$ produce siempre una opfibración de Grothendieck.

Pero se puede aplicar a algo todavía más general que funtores. . .

Seudofuntores

Un funtor $P : C \to \mathrm{Cat}$ le asocia:

- a cada objeto c de C una categoría $P(c)$, y
- a cada morfismo $f : c_1 \to c_2$ un funtor $P(c_1) \to P(c_2)$.

Esta asociación debe cumplir que los funtores $P(f) \circ P(g)$ y $P(f \circ g)$ son iguales.

Igualdad es una noción muy rígida para funtores, algo como pedir que dos grupos sean iguales. Es más razonable pedir que dos funtores (¡o dos grupos!) sean isomorfos.

Un seudofuntor en lugar de cumplir que $P(f) \circ P(g) = P(f \circ g)$, viene *equipado* con isomorfismos $\theta(f, g) : P(f) \circ P(g) \to P(f \circ g)$.

Estos isomorfismos deben ser *coherentes*, es decir, los dos siguientes isomorfismos $P(f) \circ P(g) \circ P(h) \to P(f \circ g \circ h)$ deben ser iguales:

- $P(f)\circ P(g)\circ P(h) \xrightarrow{\theta(f,g)P(h)} P(f\circ g)\circ P(h) \xrightarrow{\theta(f\circ g,h)} P(f\circ g\circ h)$
- $P(f)\circ P(g)\circ P(h) \xrightarrow{P(f)\theta(g,h)} P(f)\circ P(g\circ h) \xrightarrow{\theta(f,g\circ h)} P(f\circ g\circ h)$

La construcción de Grothendieck III

Es posible aplicar la construcción a un seudofuntor $C \to \mathrm{Cat}$, solo modificando la definición de la composición.

Habíamos definido la composición con la fórmula $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ P(f)(g'))$. El dominio de $P(f)(g')$ es $P(f)\big(P(f')(d_0)\big)$, que en el caso de un funtor P sí es igual a $P(f \circ f')(d_0)$.

Para un seudofuntor esos objetos solo son isomorfos, por medio del isomorfismo $\theta(f, f')_{d_0}$. Insertándolo en la definición de la composición, podemos extender la construcción de Grothendieck a seudofuntores.

Así obtenemos una equivalencia entre seudofuntores $C \to \mathrm{Cat}$ y opfibraciones de Grothendieck sobre C.

$$\mathrm{SeudoFun}(C, \mathrm{Cat}) \simeq \mathrm{OpFib}(C)$$

Regresando a las extensiones de grupos

- Sea $1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \to 1$ una extensión.
- Podemos interpretar el homormofismo suprayectivo p como funtor $bE \to bQ$.
- Habíamos dicho que p no es una opfibración discreta, pero es fácil ver que sí es una opfibración de Grothendieck.
- Por lo tanto, p corresponde a un seudofuntor $P : bQ \to \mathrm{Cat}$
- Si $*_Q$ denota al único objeto de bQ, $P(*_Q)$ es la categoría bN, así que el seudofuntor P cae en una porción pequeña de Cat que tiene:

objetos	únicamente a la categoría bN
morfismos	funtores $bN \to bN$ que corresponden a automorfismos de N (¡porque Q es grupo!).
2-morfismos	isomorfismos naturales entre esos funtores.

Llamémosle a esto el *2-grupo de automorfismos* de N, denotado por AUT(N).

Clasificación de extensiones de grupos

$\{$Extensiones de Q por $N\} \leftrightarrow \{$seudofuntores $bQ \to \mathrm{AUT}(N)\}$.

¿Que quiere decir concretamente un seudofuntor en este caso?

- Ambos lados tienen un solo objeto, así que $*_Q \mapsto bN$.
- Por cada $q \in Q$ tenemos un automorfismo $P(q) : N \to N$ del grupo N.
- Dados dos elementos $q_1, q_2 \in Q$, los automorfismos $P(q_1) \circ P(q_2)$ y $P(q_1 q_2)$ no tienen porque ser iguales, solo «isomorfos» con isomorfismo $\theta(q_1, q_2)$.
- Un «isomorfismo de automorfismos» resulta ser simplemente un elemento $\theta(q_1, q_2) \in N$ tal que para toda $n \in N$:

$$P(q_1)P(q_2)(n) = \theta(q_1, q_2)\big(P(q_1 q_2)(n)\big)\theta(q_1, q_2)^{-1}$$

- La coherencia se traduce en que

$$\theta(q_1, q_2)\theta(q_1 q_2, q_3) = P(q_1)(\theta(q_2, q_3))\theta(q_1, q_2 q_3).$$

Productos semidirectos

Sea $1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \to 1$ una extensión.

Si existe un homomorfismo de grupos $s : Q \to E$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_Q$, entonces la extensión se reduce a un *producto semidirecto*, $E \cong N \rtimes Q$.

Podemos definir una acción de Q sobre N como sigue:

- Como $i(N)$ es un subgrupo normal de Q, es invariante bajo conjugación por $s(q)$, así podemos definir un automorfismo $P(q)$ de N por medio de:

$$P(q)(n) := i^{-1}\Big(s(q)i(n)s(q)^{-1}\Big)$$

- Como s es un homormofismo, $P(q_1) \circ P(q_2) = P(q_1)P(q_2)$, así que podemos tomar $\theta(q_1, q_2) \equiv 1_N$.

Moraleja: los productos semidirectos corresponden a aquellos seudofuntores $bQ \to \mathrm{AUT}(N)$ que no tienen nada de seudo.

Extensiones centrales

Sea $1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \to 1$ una extensión.

Si $i(N)$ está contenido en el centro de E, se dice que la extensión es *central*. Nótese que N es abeliano en este caso.

Sin importar qué $\bar{q} \in p^{-1}(q)$ se tome, $\bar{q}i(n)\bar{q}^{-1} = i(n)$, pues $i(n)$ está en el centro de E. Así que en este caso los automorfismos $P(q) : N \to N$ son todos la identidad.

Toda la información del seudofuntor está contenida en la condición de coherencia. Debemos elegir elementos $\theta(q_1, q_2) \in N$ que cumplan $\theta(q_1, q_2)\theta(q_1q_2, q_3) = \theta(q_2, q_3)\theta(q_1, q_2q_3)$.

La función $\theta : Q \times Q \to N$ se llama un *2-cociclo*, una noción de la cohomología de grupos.

No estamos muy lejos de demostrar que las clases de isomorfismo de extensiones centrales de Q por N están en biyección con $H^2(Q; N)$, el segundo grupo de cohomología del grupo Q con coeficientes en el grupo abeliano N.

Cohomología de grupos, topológicamente

Las extensiones centrales de Q por N vimos que están clasificadas por seudofuntores $P : bQ \to \mathrm{AUT}(N)$ muy especiales: los que cumplen que $P(q) = \mathrm{id}_N$ para toda $q \in Q$.

Estos caen en un 2-subgrupo pequeño de $\mathrm{AUT}(N)$, que llamaremos b^2N. Tiene: un único objeto (bN), un único morfismo (id_N) y 2-morfismos dados por los elementos de N.

Hay un procedimiento que construye un espacio topológico $|C|$ a partir de cualquier categoría C, o incluso de cualquier 2-categoría: «tomar la realización geométrica del nervio de la categoría».

Tenemos que $|bG| = K(G, 1)$ y $|b^2N| = K(N, 2)$ son espacios de Eilenberg-MacLane.

Se puede probar que las clases de isomorfismo de seudofuntores $bQ \to b^2N$ están en biyección con las clases de homotopía de funciones continuas $K(Q, 1) \to K(N, 2)$, que es una de las maneras de definir $H^2(K(G, 1); N)$.

Fin

¡Gracias!