Las consecuencias de que las curvas tengan siempre cero o dos extremos

Una introducción a la topología diferencial

Omar Antolín Camarena (IMATE UNAM - CDMX)

Rectas tangentes, planos tangentes.

Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función suave, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ es una curva.

Dado un punto (x_0, y_0) en la curva, la ecuación de la recta tangente en ese punto es

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Algo similar sucede en cualquier número de dimensiones, por ejemplo, si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función suave, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$ es una superficie.

Dado un punto (x_0, y_0, z_0) en la superficie, la ecuación del plano tangente en ese punto es

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0.$$

Puntos críticos

Si para algún punto (x_0, y_0, z_0) sucediera que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

entonces ¡no tenemos un plano tangente a $F = 0$ bien definido en ese punto!

En ese caso decimos que (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de F.

Valores regulares

Si $c \in \mathbb{R}$ cumple que ninguno de los puntos (x_0, y_0, z_0) tales que $F(x_0, y_0, z_0) = c$ es crítico, entonces la superficie de nivel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x_0, y_0, z_0) = c\}$ tiene un plano tangente en cada punto.

En ese caso, decimos que c es un valor regular de F y que la superficie de nivel $F^{-1}(c)$ es una superficie suave.

Más variables, más ecuaciones

Si $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una función suave, un punto $x_0 \in \mathbb{R}^m$ se llama crítico, si el rango de la matriz Jacobiana $J_F(x_0) := \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ es menor que n.

Si $c \in \mathbb{R}^n$ es tal que ninguno de los puntos x_0 con $F(x_0) = c$ es crítico, entonces en cada punto x_0 de $F^{-1}(c)$ hay un hiperplano tangente bien definido cuya ecuación está dada por $J_F(x_0)(x - x_0) = 0$.

En ese caso c se llama un valor regular de F y el conjunto $F^{-1}(c)$ es un ejemplo de una variedad suave.

Variedades suaves

La topología diferencial estudia este tipos de objetos geométricos, que tienen hiperplanos tangentes en cada punto, como $F^{-1}(c)$ cuando c es un valor regular de F.

En general una variedad suave no tiene porque estar dada por «un sistema de ecuaciones global» de la forma $F^{-1}(c)$.

Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad suave de dimensión $m \leq n$ si para $x \in X$ hay una bola abierta V de $\mathbb{R}^n$ tal que $X \cap V$ se pueda parametrizar por medio de una función suave definida en un abierto de $\mathbb{R}^m$, esto es, que exista un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ y una función suave $\phi : U \to X \cap V$ que es biyectiva y cuya inversa también es suave.

En particular, cada punto $x \in X$ tiene una vecindad V tal que $V \cap X$ es homeomorfo a una bola euclidiana de dimensión m.

«Cerca de cada punto de X, X se ve como un cachito abierto de $\mathbb{R}^n$.»

Variedades suaves con frontera

Hasta ahora hemos hablado de objetos geométricos como el elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$. Esto es una superficie, una variedad de dimensión 2. Cada punto del elipsoide tiene una vecindad difeomorfa a un disco abierto en $\mathbb{R}^2$.
Consideremos ahora el elipsoide con todo y su interior, es decir, los puntos que satisfacen la desigualdad:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1.$$

- Los puntos del interior (los que cumplen la desigualdad estricta) tiene vecindades difeomorfas a bolas de $\mathbb{R}^3$.
- Los puntos donde se cumple la igualdad tienen vecindades difeomorfas a semibolas en $\mathbb{R}^3$, como $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, z \geq 0\}$.

Si permitimos semibolas entre las vecindades, obtenemos la noción de variedad con frontera.

El cálculo de varias variables se generaliza a variedades suaves

Hacemos trampa para definir función suave: recurrimos a los $\mathbb{R}^\ell$ donde ya sabemos qué significa.

Si $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^k$ son variedades suaves, decimos que una función $F : X \to Y$ es suave, si para cada punto $x \in X$ hay una bola $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ y una función suave $\bar{F} : U \to \mathbb{R}^k$ tal que $\bar{F}|_{X \cap U} = F$.

También hay un sustituto de la matriz Jacobiana de F en un punto $x \in X$: una transformación lineal $DF(x) : T_x X \to T_{F(x)} Y$, donde $T_x X$ es el hiperplano tangente a X en x (y similarmente para Y).

De nuevo x es valor crítico si el rango de $DF(x)$ es menor que la dimensión de Y y $c \in Y$ es valor regular si ninguno de los x tales que $F(x) = c$ es crítico.

El Teorema de Sard

Nos gustan los valores regulares porque así podemos obtener subvariedades.

Teorema

Si $F : X \to Y$ es una función suave entre variedades con frontera y c es un valor regular para la restricción de F tanto a la frontera de X como al interior de X, entonces $F^{-1}(c) \subset X$ es una subvariedad con frontera de X, de dimensión $\dim X - \dim Y$*, y cuya frontera es $\partial(F^{-1}(c)) = F^{-1}(c) \cap \partial X$.*

Comparte este Teorema de Sard de la abundancia para que nunca te falten valores regulares:

Teorema

Casi todos los valores son regulares, es decir, el conjunto de puntos de Y que no son valores regulares para F es de medida 0.

En particular si tenemos n funciones suaves con codominio Y casi todos los puntos de Y son valores regulares para las n funciones simultáneamente.

Topología de dimensiones muy, muy bajas

Variedades de dimensión 0

- Conexas: un punto.
- Compactas: un conjunto finito de puntos.

Variedades de dimensión 1

- Compactas y conexas: $[0,1]$, S^1.
- Conexas pero no compactas: $(0,1)$, $[0,1)$.
- Compactas: uniones ajenas de un número finito de intervalos cerrados y círculos.

Propiedad clave

Todas las variedades compactas de dimensión 1 tienen un número par de puntos en la frontera.

El Teorema del Punto Fijo de Brouwer

Sea $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ el disco de dimensión n.

Teorema

Cualquier función continua $f : D^n \to D^n$ tiene al menos un punto fijo, es decir, para algún $x \in D^n$, $f(x) = x$.

Ejercicio de calentamiento: dimensión 1

Para $n = 1$, esto es fácil de probar.

Demostración.

Dada $f : [0,1] \to [0,1]$ continua definimos $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por la fórmula $g(x) := f(x) - x$.
Tenemos que $g(0) = f(0) \geq 0$ y $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$.
Por el teorema del valor intermedio, hay algún $x_0 \in [0,1]$ tal que $g(x_0) = 0$ y por lo tanto, $f(x_0) = x_0$. $\square$

Reducción al caso suave

Las herramientas de la topología diferencial están hechas para funciones suaves. Muchas veces podemos deducir resultados para funciones continuas a partir del caso suave usando aproximación.

Teorema

Dada una función continua $f : D^n \to D^n$ y un $\epsilon > 0$, existe una función suave $g : D^n \to D^n$ tal que $\|f(x) - g(x)\| \leq \epsilon$ para toda $x \in D^n$.

Supongamos que sabemos el teorema de Brouwer para funciones suaves y sea $f : D^n \to D^n$ continua.
Para cada k, sea $g_k : D^n \to D^n$ suave con $\|f(x) - g_k(x)\| \leq 1/k$.
Cada g_k tiene un punto fijo x_k. Los $\{x_k\}$ tienen una subsucesión convergente, digamos $\{x_{k_j}\}$.
Tenemos $\|f(x_{k_j}) - x_{k_j}\| = \|f(x_{k_j}) - g(x_{k_j})\| \leq 1/k_j$.
Por lo tanto, $lim_{j\to\infty} x_{k_j}$ es un punto fijo de f.

Reducción al teorema de no retracción

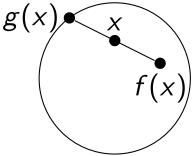
Tal vez el siguiente teorema es más intuitivo que el de Brouwer:

Teorema

No existe una función suave $g : D^n \to \partial D^n$ *tal que* $g|_{\partial D^n} = \mathrm{id}_{\partial D^n}$.

Si $f : D^n \to D^n$ no tuviera puntos fijos, podríamos construir un contraejemplo al teorema de no retracción.

Definimos $g : D^n \to \partial D^n$ geométricamente como sigue: dado $x \in D^n$, consideramos seguimos el rayo que parte de $f(x)$ hacia x hasta que corte a ∂D^n y definimos $g(x)$ como el punto de intersección.



¿Por qué es suave g? Pues $g(x) = f(x) + t(x - f(x))$ para el valor de $t > 0$ que cumpla $\|f(x) + t(x - f(x))\| = 1$, o sea,

$$\|x - f(x)\|^2 t^2 + 2\langle f(x), x - f(x)\rangle t + \|f(x)\|^2 - 1 = 0.$$

Consideremos la fórmula cuadrática: como una solución es > 0 y la otra es ≤ 0, el número en la raíz es > 0; y el denominador es $\|x - f(x)\|^2 > 0$.

Prueba del teorema de no retracción

Una versión un poco más general del teorema de no retracción:

Teorema

Si X es una variedad suave con frontera, no existe una función suave $g : X \to \partial X$ tal que $g|_{\partial X} = \mathrm{id}_{\partial X}$.

Demostración.

Supongamos que exista tal g y sea z un valor regular de g.
Entonces $g^{-1}(z)$ es una subvariedad de X de dimensión $\dim X - \dim \partial X = 1$ y con frontera $\partial(g^{-1}(z)) = g^{-1}(z) \cap \partial X$.
Como $g(w) = w \neq z$ para cualquier $w \in \partial X \setminus \{z\}$, entonces $g^{-1}(z) \cap \partial X = \{z\}$.
¡Esto contradice que $\partial(g^{-1}(z))$ tiene un número par de puntos! $\square$

El grado módulo 2 de una función suave

Teorema

Sean X y Y dos variedades suaves sin frontera de la misma dimensión tales que X es compacta y Y es conexa. Si $f : X \to Y$ una función suave, entonces para cualquier valor regular $y \in Y$, el número de puntos en $f^{-1}(y)$ siempre tiene la misma paridad.

Advertencia: Solo la paridad del número de preimágenes es invariante. Consideremos $f(x) = x^2$:

- si $y > 0$, $\# f^{-1}(y) = 2$;
- si $y < 0$, $\# f^{-1}(y) = 0$;
- si $y = 0$, $\# f^{-1}(y) = 1$, pero $y = 0$ no es valor regular.

Definición

Llamaremos grado módulo 2 a la paridad del número de preimágenes, y lo denotaremos $\deg(f) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Homotopías entre funciones

El grado módulo 2 no cambia si la función «cambia gradualmente». Supongamos que para toda $t \in [0,1]$ tenemos una función suave $h_t : X \to Y$. Podemos imaginar esa familia de funciones como una película mostrando como varía la función h_t al avanzar el tiempo t. Por ejemplo $h_t(x) = tx^2 + (1-t)\sin(x)$ es una película que empieza con la función $\sin(x)$ en $t = 0$ y termina con una parábola en $t = 1$.

Definición

Una homotopía entre dos funciones suaves $f, g : X \to Y$ es una función suave $h : X \times [0,1] \to Y$ tal que $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$ para toda $x \in X$.

Las funciones intermedias en la película están dadas por $h_t(x) := h(x,t)$.

El grado módulo 2 es invariante bajo homotopía

Teorema

Sean X y Y dos variedades suaves sin frontera de la <u>*misma dimensión*</u> *tales que X es compacta y Y es conexa. Si $f, g : X \to Y$ son dos funciones suaves homotópicas, entonces $\deg(f) \equiv \deg(g) \pmod 2$.*

Probaremos al mismo tiempo este teorema y que el grado está bien definido (o sea, que la paridad de $\#f^{-1}(y)$ no depende de qué valor regular se elija).

Por el resto de la prueba, X y Y denotarán variedades suaves sin frontera de la <u>misma dimensión</u> tales que X es compacta y Y es conexa. Usaremos $f, g : X \to Y$ para funciones suaves y h para una homotopía entre ellas.

El grado es localmente constante en un punto regular

Lema

Sea y un valor regular de $f : X \to Y$. Entonces existe una vecindad V_y de y tal que cualquier $y' \in V_y$ es un valor regular y $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y')$.

Demostración.

Sea $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_m\}$.
Como X y Y tienen la misma dimensión, podemos usar el teorema de la función inversa para concluir que alrededor de cada x_k hay una vecindad W_k tal que $f(W_k)$ es abierto y $f|_{W_k} : W_k \to f(W_k)$ es un difeomorfismo.
Podemos encoger los W_k para que sean ajenos (porque solo hay un número finito de ellos).
Definiendo $V' := \cap_{k=1}^{m} f(W_k)$ y $U'_k := W_k \cap f^{-1}(V')$, tenemos que $f|_{U'_k} : U'_k \to V'$ es un difeomorfismo.
Sabemos que $f^{-1}(y)$ tiene un punto en cada U'_k, pero para algunos $y' \in V'$ podría haber más preimágenes fuera de $\bigcup U'_k$.
$V_y := V' \setminus f(X \setminus \bigcup U'_k)$ es la vecindad deseada. $\square$

Para un valor regular fijo, el grado es invariante bajo homotopía

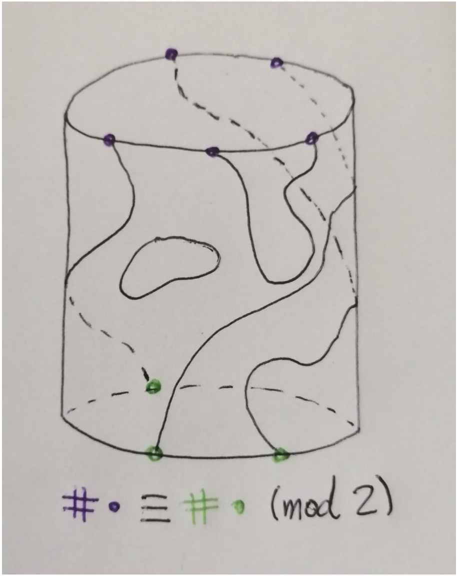
Lema

Si $f, g : X \to Y$ son funciones suaves, $h : X \times [0,1] \to Y$ es una homotopía entre ellas, y $y \in Y$ es valor regular tanto para f como para g, entonces $\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod 2$.

Demostración.

Por el lema anterior hay una vecindad de y en la que todos los puntos son valores regulares tanto para f como para g y el número de puntos en las preimágenes no cambia.
Podemos escoger un y' en la vecindad que también sea valor regular para h.
Entonces $h^{-1}(y')$ es una subvariedad de dimensión 1 de $X \times [0,1]$, con frontera $\partial(h^{-1}(y')) = (f^{-1}(y') \times \{0\}) \cup (g^{-1}(y') \times \{1\})$.
Y por lo tanto, ¡$\#f^{-1}(y') + \#g^{-1}(y') = \#\partial(h^{-1}(y'))$ es par! $\square$

Misma prueba, ahora en un dibujo



Se puede mover cualquier punto a cualquier otro

Teorema

Para cualesquiera dos puntos $y, y' \in Y$ existe un difeomorfismo $\phi : Y \to Y$ homotópico a la identidad tal que $\phi(y) = y'$.

Esto, desde luego, usa que Y es conexa.

La idea es hacer primero el caso del disco D^n: si pudiéramos probar que para cualesquiera dos puntos del interior hay un difeomorfismo $D^n \to D^n$ que lleva uno en el otro fijando la frontera;

entonces habría una vecindad de $y \in Y$ donde podríamos mover a y a cualquier punto de la vecindad sin tocar el complemento de la vecindad.

Y el conjunto de puntos de Y a los que podemos mover y mediante un difeomorfismo homotópico a la identidad sería tanto abierto como cerrado.

Todo lo que queríamos saber sobre el grado módulo 2

De los dos teoremas básicos sobre el grado:

- que la paridad de $\#f^{-1}(y)$ no depende del valor regular y, y
- que si f y g son homotópicas, $\deg(f) \equiv \deg(g) \pmod 2$,

¡ya solo nos falta terminar el primero!
Sean y, y' valores regulares de f y sea $\phi : Y \to Y$ un difeomorfismo $Y \to Y$ tal que $\phi(y) = y'$.
Entonces y' es valor regular de $\phi \circ f$ y esta función es homotópica a f.
Por lo tanto $\#f^{-1}(y') \equiv \#(\phi \circ f)^{-1}(y') = \#f^{-1}(y) \pmod 2$.

Resumen sobre el grado módulo 2

Sean X y Y dos variedades suaves sin frontera de la misma dimensión tales que X es compacta y Y es conexa.

Teorema

Si $f : X \to Y$ una función suave, entonces para cualquier valor regular $y \in Y$, el número de puntos en $f^{-1}(y)$ siempre tiene la misma paridad.

Teorema

Si $f, g : X \to Y$ son dos funciones suaves homotópicas, entonces $\deg(f) \equiv \deg(g) \pmod 2$.

Criterio para grado par

Teorema

Si $f : X \to Y$ se puede extender a una función $\bar{f} : W \to Y$ donde W es alguna variedad suave cuya frontera es X, entonces $\deg(f) \equiv 0 \pmod 2$.

Demostración.

Para calcular el grado, elegimos $y \in Y$ que sea valor regular para f y $\bar{f}$.

Entonces $\bar{f}^{-1}(y)$ es una variedad de dimensión uno con frontera $f^{-1}(y)$. Por lo tanto, $f^{-1}(y)$ tiene un número par de puntos. $\square$

El teorema fundamental del álgebra, I

Teorema

Cualquier polinomio de grado mayor o igual que uno con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.

Demostración.

Sea $p(z) = z^n + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_n$ un polinomio con $a_j \in \mathbb{C}$.
Definimos $p_t(z) = z^n + t(a_1 z^{m-1} + \cdots + a_n)$ para $t \in [0,1]$.
Esto nos da una homotopía entre $p_0(z) = z^n$ y $p_1(z) = p(z)$.
Si elegimos R suficientemente grande ninguno de los polinomios p_t tiene raíces sobre el círculo $C_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$, ya que:

$$\frac{p_t(z)}{z^n} = 1 + t\left(\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right) \xrightarrow{z\to\infty} 1.$$

Entonces sobre C_R podemos dividir entre $|p_t(z)|$ y obtenemos una homotopía $\frac{p_t}{|p_t|} : C_R \to C_1$.

(continuará...)

El teorema fundamental del álgebra, II

Demostración.

Como el grado módulo 2 es invariante bajo homotopía, tenemos que $\deg\left(\frac{p}{|p|}\right) \equiv \deg\left(\frac{p_0}{|p_0|}\right) \pmod{2}$.

Es fácil calcular $\deg\left(\frac{p_0}{|p_0|}\right)$: cualquier $w \in C_1$ tiene n preimágenes dadas por las n raíces n-ésimas de w —bueno, técnicamente dados por $R\sqrt[n]{w} \in C_R$.

Si el polinomio p no tuviera raíces, entonces la función $\frac{p}{|p|}$ está bien definida en todo el disco $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, cuya frontera es $\partial D_R = C_R$.

Entonces por el teorema anterior, $\deg(\frac{p}{|p|}) \equiv 0 \pmod{2}$.

Esto es una contradicción si n es impar y por lo tanto hemos probado el teorema fundamental del álgebra para polinomios de grado impar. $\square$

¿Y la otra mitad?

Para eso se necesita una noción de grado que toma en cuenta <u>orientación</u>. . .

Referencias

- John Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Univ. Press of Virginia, Charlottesville. 1965. PDF
- Victor Guillemin, Allan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall. Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. 1974. PDF