GRUPOS RELATIVAMENTE HIPERBÓLICOS

XVII Jornadas de Geometría, Topología y Dinámica

Sandy Guadalupe Aguilar Rojas

16 de diciembre del 2021

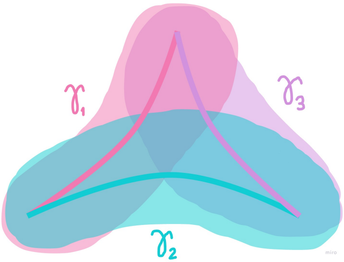
Grupos hiperbólicos

Espacios hiperbólicos

Definición

Un espacio métrico es hiperbólico si existe $\delta > 0$ tal que todo triángulo geodésico $\Delta = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ es δ-delgado; esto es,

$$\gamma_1 \subset N_\delta(\gamma_2, \gamma_3), \quad \gamma_2 \subset N_\delta(\gamma_1, \gamma_3), \quad \gamma_3 \subset N_\delta(\gamma_1, \gamma_2).$$



Grupos hiperbólicos

Definición

Un grupo G con conjunto generador finito S es hiperbólico si $Cay(G, S)$ es un espacio hiperbólico.

¿Cómo se puede generalizar esto?

La definición de Farb

El grafo de Cayley aconado

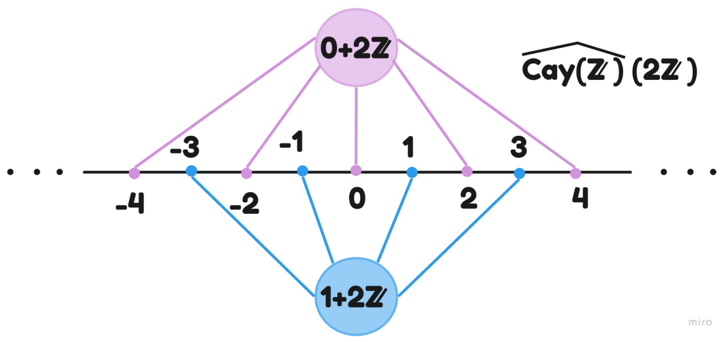
Sea G un grupo finitamente generado con grafo de Cayley Γ y sea $\{H_1, \ldots, H_r\}$ un conjunto de subgrupos de G finitamente generados, con $r \in \mathbb{N}$.

Definición

El grafo de Cayley aconado de G respecto a $\{H_1, \ldots, H_r\}$ es el grafo $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}(\{H_1, \ldots, H_r\})$ dado como sigue:

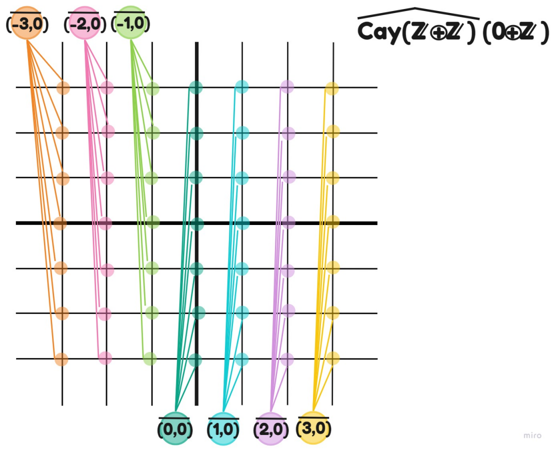
- Vértices: son los vértices de Γ y se agrega un vértice $v(gH_i)$ por cada clase lateral gH_i, con $g \in G$ e $i \in \{1, \ldots, r\}$.
- Aristas: son las aristas de Γ y se agrega una arista de longitud $\frac{1}{2}$ entre h y $v(gH_i)$ para cada $g \in G$ y $h \in gH_i$, con $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Ejemplo



0+2ℤ
1+2ℤ
$\widehat{\mathrm{Cay}(\mathbb{Z})}(2\mathbb{Z})$
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
miro

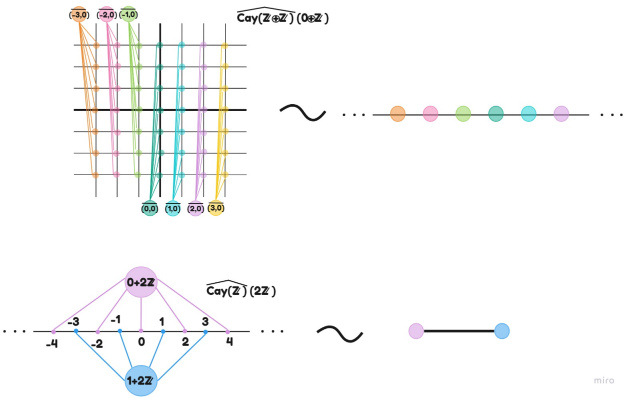
Ejemplo



$\overline{(-3,0)}$
$\overline{(-2,0)}$
$\overline{(-1,0)}$
$\widehat{Cay(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})}(0\oplus\mathbb{Z})$
$\overline{(0,0)}$
$\overline{(1,0)}$
$\overline{(2,0)}$
$\overline{(3,0)}$
miro

Observación

Sea G un grupo finitamente generado y $H \leq G$ un subgrupo normal, entonces $H \backslash G \sim_{ci} \widehat{\Gamma}(H)$.



Grupos débilmente relativamente

Definición

El grupo G es (débilmente) hiperbólico relativo a $\{H_1, \ldots, H_r\}$ si el grafo de Cayley aconado $\widehat{\Gamma}$ de G respecto a $\{H_1, \ldots, H_r\}$ es hiperbólico.

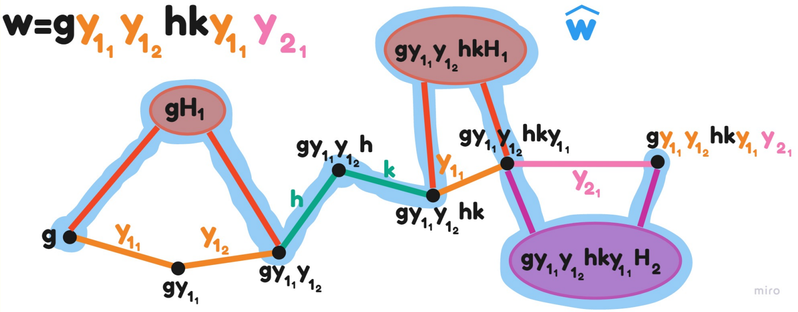
Observación

Los grupos hiperbólicos son débilmente relativamente hiperbólicos.

Definición

Sea S un conjunto generador finito de G y S_i un conjunto de palabras $y_{i_j} \in F(S)$ las cuales representan los generadores de H_i, con $i \in \{1, \dots, r\}$ y donde $F(S)$ denota al grupo libre generado por S. Dado un camino w en Γ, se construye a $\hat{w}$ en $\widehat{\Gamma}$ como sigue.

1. Se busca de izquierda a derecha en w subpalabras y_{i_j}; si estas se traslapan, se consideran las que se encuentran más a la izquierda.
2. Para cada subpalabra maximal z de w dada por $y'_{i_j}s$, si z va de g a gz en Γ, se reemplaza el camino dado por z por una arista del vértice asociado a g al vértice $v(gH_i)$ y una arista de $v(gH_i)$ al vértice asociado a gz.


$w = gy_{1_1}y_{1_2}hky_{1_1}y_{2_1}$
$\widehat{w}$
gH_1
$gy_{1_1}y_{1_2}hkH_1$
$gy_{1_1}y_{1_2}h$
h
k
y_{1_1}
$gy_{1_1}y_{1_2}hky_{1_1}$
$gy_{1_1}y_{1_2}hky_{1_1}y_{2_1}$
y_{2_1}
$gy_{1_1}y_{1_2}hk$
g
y_{1_1}
y_{1_2}
gy_{1_1}
$gy_{1_1}y_{1_2}$
$gy_{1_1}y_{1_2}hky_{1_1}H_2$
miro

Definición

Dado un camino w en Γ, si $\hat{w}$ pasa por algún vértice $v(gH_i)$ se dice que w (o $\hat{w}$) penetra a la clase lateral gH_i.

Definición

Sea w un camino en Γ.

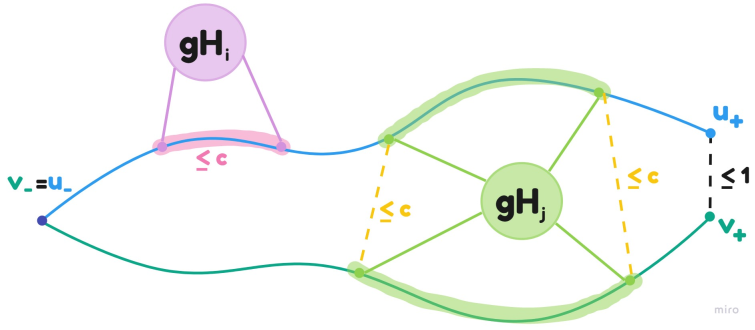
- Si $\hat{w}$ es una geodésica en $\widehat{\Gamma}$ se dice que w es una geodésica relativa en Γ.
- Si $\hat{w}$ es una $(P, 0)$-cuasi-geodésica, con $P \geq 1$, a w se le llama una $(P, 0)$-cuasi-geodésica relativa en Γ.
- El camino w (o $\hat{w}$) es un camino sin backtracking si para toda clase lateral gH_i penetrada por $\hat{w}$, $\hat{w}$ no pasa por gH_i más de una vez.

La propiedad BCP

Definición (Propiedad BCP)

El par $(G, \{H_1, \ldots, H_r\})$ satisface la Propiedad BCP si para todo $P \geq 1$ existe $c = c(P) \geq 0$ tal que si u y v son $(P, 0)$-cuasi-geodésicas relativas sin backtracking con $u_- = v_-$ y $d_\Gamma(u_+, v_+) \leq 1$ (donde u_-, v_- y u_+, v_+ denotan los extremos iniciales y finales de u y v, respectivamente), entonces se satisface lo siguiente.

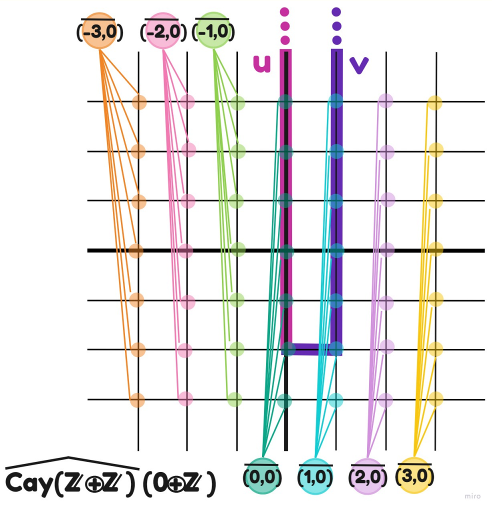
- Si u penetra un coset gH_i pero v no penetra a gH_i, entonces u viaja una Γ-distancia a lo más c en gH_i.
- Si u y v penetran a un coset gH_i, entonces los vértices de Γ en los que u y v entran a gH_i por primera vez se encuentran a Γ-distancia a lo más c; similarmente, para los vértices en los que u y v salen de gH_i por última vez.



Observación

Los grupos hiperbólicos satisfacen la propiedad BCP.

No ejemplo



La definición de Osin

Grupos hiperbólicos

Proposición

Sea G un grupo finitamente generado. Se tiene que G es hiperbólico si y sólo si su función de Dehn asociada ∂_G es a lo más lineal.

Teorema

Sea G un grupo finitamente generado. Se tiene que G es hiperbólico si y sólo admite una presentación de Dehn.

Corolario

Sea G un grupo finitamente generado. Si G es hiperbólico entonces es finitamente presentado.

¿Cómo se puede generalizar esto?

Grupos relativamente fin. pres.

Consideremos G un grupo, $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección de subgrupos de G y $X \subset G$ simétrico (esto es, $X = X^{-1}$).

Definición

El grupo G es generado por X respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ si G es generado por el conjunto $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\right) \cup X$.

Un grupo G generado por X respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ puede pensarse como un cociente del grupo

$$F = \left(*_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{H}_\lambda \right) * F(X),$$

donde $F(X)$ es el grupo libre generado por el conjunto $X \subset G$ y para cada $\lambda \in \Lambda$, $\widetilde{H}_\lambda$ es una copia isomorfa de H_λ.

Sea

$$\mathcal{H} = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\widetilde{H}_\lambda \setminus \{1\} \right),$$

entonces F está generado por $X \cup \mathcal{H}$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$ se define el conjunto S_λ como el conjunto de palabras en el alfabeto $\widetilde{H}_\lambda$ que representan la identidad en F, entonces

$$F = \left\langle X, \mathcal{H} \middle| S = 1 \text{ si } S \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \right\rangle.$$

Se denotará por N al núcleo del morfismo

$$F \to G$$

dado por extender los isomorfimos dados por $H_\lambda \cong \widetilde{H}_\lambda$ y la función identidad en X.

Definición

Si un grupo G generado por X respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ satisface que N, dado como antes, es la cerradura normal de $\mathcal{R}$ en el grupo F, para algún subconjunto $\mathcal{R}\subset(X\cup\mathcal{H})^*$, entonces G tiene presentación relativa respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ dada como

$$\left\langle X,\mathcal{H}\,\middle|\, S=1 \text{ si } S\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda;\, R=1 \text{ si } R\in\mathcal{R}\right\rangle .$$

Para simplificar notación, nos referiremos a la presentación dada en la definición previa escribiendo

$$\langle X, H_\lambda, \lambda\in\Lambda | R=1 \text{ si } R\in\mathcal{R}\rangle \tag{1}$$

La presentación relativa (1) es finita si los conjuntos X y $\mathcal{R}$ son finitos.

Funciones de Dehn

Sea G un grupo dado por la presentación relativa (1). Para toda palabra $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ que representa 1 en G existe una expresión

$$W =_F \prod_{i=1}^{k} f_i^{-1} R_i f_i, \tag{2}$$

donde $=_F$ representa la igualdad en el grupo F, $R_i \in \mathcal{R}$ y $f_i \in F$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Definición

Una función isoperimétrica relativa de la presentación (1) respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una función

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y cualquier palabra $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ con $||W|| \leq n$ (donde $||\cdot||$ denota la longitud de W) que representa 1 en G, es posible escribir a W como en (2) con

$$k \leq f(n).$$

Definición

La función de Dehn relativa de un grupo G con presentación (1) respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es la función isoperimétrica relativa de (1) más pequeña.
Si G no posee funciones isoperimétricas relativas finitas, se dice que la función de Dehn relativa no está bien definida.

Definición

Dadas funciones $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, decimos que f es asintóticamente menor que g si existen constantes $C, K, L \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(n) \leq Cg(Kn) + Ln$$

y se escribe $f \preceq g$. Si $f \preceq g$ y $g \preceq f$, entonces f es asintóticamente equivalente a g, se denotará ésto como $f \sim g$.

Grupos relativamente hiperbólicos

Definición

Sean G un grupo y $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección de subgrupos de G. Decimos que G es hiperbólico relativo a $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ si es relativamente finitamente presentado con respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ y la función de Dehn relativa de G respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es lineal.

Observación

Los grupos hiperbólicos son relativamente hiperbólicos.

La definición de Bowditch

Grupos hiperbólicos

Proposición

Sean G un grupo finitamente generado y X un espacio métrico geodésico propio e hiperbólico. Supongamos que G actúa en X por isometrías de forma cocompacta y propiamente discontinua.

- Si $g \in G$ es de orden finito, entonces g actúa como isometría elíptica.
- Si $g \in G$ es de orden infinito, entonces g actúa como isometría hiperbólica.

¿Cómo se puede generalizar esto?

Sean M un espacio topológico metrizable y G un grupo que actúa por homeomorfismos en M.

Definición

Se dice que G es un grupo de convergencia si la acción inducida en el espacio de tripletas distintas de M es propiamente discontinua.

Se denotará por $\Lambda G \subset M$ al conjunto límite de G; esto es, el único subconjunto cerrado minimal no vacío G-invariante. Se dice que la acción es minimal si $\Lambda G = M$.

Definición

Si M es compacto y $card(M) \geq 3$. Sea $\gamma \in G$, se define el conjunto $Fix(\gamma) = \{x \in M \colon \gamma \cdot x = x\}$. Se dice que γ es

- elíptico si tiene orden finito,
- parabólico si tiene orden infinito y $card\big(Fix(\gamma)\big) = 1$,
- loxodrómico si tiene orden infinito y $card\big(Fix(\gamma)\big) = 2$.

Definición

Un subgrupo $H \leq G$ es parabólico si es infinito, fija algún punto de M y no contine elementos loxodrómicos. En este caso, el punto fijo se llama punto parabólico y es único.

Definición

Un grupo parabólico H con punto fijo p es acotado si el cociente $H \backslash \big(M - \{p\}\big)$ es compacto.

Un punto $p \in M$ es un punto parabólico acotado si su estabilizador H_p es acotado.

Definición

Un punto límite cónico es un punto $y \in M$ tal que existe una sucesión $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en G y $a, b \in M$ con $a \neq b$ tales que para todo $x \in M - \{y\}$ se tiene que $g_i \cdot y \to a$ y $g_i \cdot x \to b$.

Definición

Un grupo de convergencia G es geométricamente finito si todo punto de M es un punto límite cónico o un punto parabólico acotado.

Sea G un grupo y $\mathcal{H}$ un conjunto de subgrupos infinitos de G.

Definición

El grupo G es hiperbólico relativo a $\mathcal{H}$ si G admite una acción por isometrías propiamente discontinua en un espacio métrico X (dotado con la métrica de caminos) tal que

- X es propio e hiperbólico,
- todo punto de la frontera de X es punto límite cónico o punto parabólico acotado (esto es, G actúa como grupo geométricamente finito en la frontera de X),
- los elementos de $\mathcal{H}$ son precisamente los subgrupos parabólicos maximales de G,
- todo elemento de $\mathcal{H}$ es finitamente generado.

A los elementos de $\mathcal{H}$ se les llama subgrupos periferales.

¿Estas definiciones coinciden?

Equivalencia de definiciones

Teorema

Sean G un grupo generado por un conjunto finito X y $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_m\}$ una colección finita de subgrupos de G. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

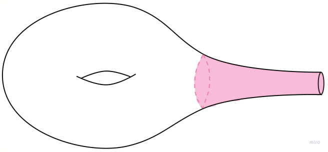
- G es relativamente hiperbólico respecto a $\{H_1, \ldots, H_m\}$ en el sentido de Osin.
- G es relativamente hiperbólico respecto a $\{H_1, \ldots, H_m\}$ en el sentido de Farb y satisface la propiedad BCP.
- G es relativamente hiperbólico respecto a $\{H_1, \ldots, H_m\}$ en el sentido de Bowditch.

Ejemplos y propiedades

Ejemplos

- Sea M^n una variedad Riemanniana de volumen finito completa no compacta de curvatura seccional negativa. Entonces $\pi_1(M^n)$ es un grupo relativamente hiperbólico respecto a su colección de subgrupos cuspidales.

Ejemplo:



$\pi_1(S_{1,1}) = F_2$ es relativamente hiperbólico respecto a $\mathbb{Z}$

Ejemplos

- Sea G un grupo hiperbólico y $H_1, H_2, \ldots, H_k \leq G$ subgrupos cuasiconvexos. Entonces G es débilmente relativamente hiperbólico con respecto a $\{H_1, \ldots, H_k\}$. Si $|H_i^g \cap H_j| < \infty$ siempre que $g \notin H_i$ o $i \neq j$, entonces G es hiperbólico relativo a $\{H_1, \ldots, H_k\}$.
- Sea S una superficie orientable de tipo finito, $Map(S)$ es débilmente relativamente hiperbólico respecto a una colección de estabilizadores de ciertas curvas.
  Nota: En muchas casos estos grupos no son relativamente hiperbólicos.

Propiedades

Sea G un grupo finitamente generado relativamente hiperbólico respecto a una colección de subgrupos $\{H_1, \ldots, H_n\}$. Entonces,

- Si $H_1, \ldots, H_n$ tiene problema de la palabra soluble, entonces dicho problema también es soluble para G.
- Si $H_1, \ldots, H_n$ tiene problema de la palabra soluble, entonces el problema de conjugación es soluble para G.
- El grupo G admite una descomposición JSJ sobre sus subgrupos parabólicos relativa a sus subgrupos periferales $\{H_1, \ldots, H_n\}$.

Gracias por su atención

Referencias

- Martin R. Bridson y André Haefliger. Metric spaces of non-positive curvature, volumen 319 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlín, 1999.
- B. Bowditch. Relatively hyperbolic groups. *International Journal of Algebra and Computation*, 22 (3), 2012.
- B. Farb. Relatively hyperbolic groups. *Geom. Funct. Anal.* 8(5):810-840, 1998.
- V. Guirardel y G. Levitt. JSJ-decompositions of finitely presented groups and complexes of groups. 2017.
- D. Osin. Relatively hyperbolic groups: Intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems. *Memoir of the American Mathematical Society*, 179 (843), 2006.