GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA LOCAL DE FOLIACIONES RIEMANNIANAS SINGULARES

Diego Corro
UNAM

Sextas Jornadas de Geometría, Topología y Dinámica, UNAM.
25 de Marzo del 2020

Instituto de Matemáticas

Motivación para estudiar foliaciones singulares

Teorema de Frobenious

Da una manera de encontrar soluciones independientes a un sistema regular de ecuaciones lineales homogéneas parciales de primer orden. Las curvas de nivel de las soluciones nos dan una partición $\mathcal{F}$ del espacio en subvariedades .

Motivación para estudiar foliaciones singulares

Teorema de Frobenious

Da una manera de encontrar soluciones independientes a un sistema regular de ecuaciones lineales homogéneas parciales de primer orden. Las curvas de nivel de las soluciones nos dan una partición $\mathcal{F}$ del espacio en subvariedades .

Esto fue generalizado por Stefan-Sussmann (1973) cuando el sistema tiene “singularidades”, i.e. cuando tenemos foliaciones con hojas de dimensión variable.

Motivación para estudiar foliaciones singulares

Teorema de Frobenious

Da una manera de encontrar soluciones independientes a un sistema regular de ecuaciones lineales homogéneas parciales de primer orden. Las curvas de nivel de las soluciones nos dan una partición $\mathcal{F}$ del espacio en subvariedades .

Esto fue generalizado por Stefan-Sussmann (1973) cuando el sistema tiene "singularidades", i.e. cuando tenemos foliaciones con hojas de dimensión variable.

Proyecciones métricas

Submersiones Riemannianas $\pi: (M^n, g) \to (B^k, h)$,

- Localmente se ven como la proyección ortogonal $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$.

Motivación para estudiar foliaciones singulares

Teorema de Frobenious

Da una manera de encontrar soluciones independientes a un sistema regular de ecuaciones lineales homogéneas parciales de primer orden. Las curvas de nivel de las soluciones nos dan una partición $\mathcal{F}$ del espacio en subvariedades .

Esto fue generalizado por Stefan-Sussmann (1973) cuando el sistema tiene “singularidades”, i.e. cuando tenemos foliaciones con hojas de dimensión variable.

Proyecciones métricas

Submersiones Riemannianas $\pi : (M^n, g) \to (B^k, h)$,

- Localmente se ven como la proyección ortogonal $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$.
- $\mathcal{F} = \{\pi^{-1}(b) \mid b \in B\}$.

Foliación singular Riemanniana (SRF)

Una **FSR** $(M, \mathcal{F})$ sobre una variedad Riemanniana (compacta) M, es una partición en subvariedades $\mathcal{F} = \{L_p \mid p \in M\}$, llamadas **hojas**, tales que L_p son conexas encajadas, y satisfacen:

- Existe una familia de campos vectoriales X_α diferenciables que generan T_pL_p para cualquier $p \in M$.

Foliación singular Riemanniana (SRF)

Una **FSR** $(M, \mathcal{F})$ sobre una variedad Riemanniana (compacta) M, es una partición en subvariedades $\mathcal{F} = \{L_p \mid p \in M\}$, llamadas **hojas**, tales que L_p son conexas encajadas, y satisfacen:

- Existe una familia de campos vectoriales X_α diferenciables que generan T_pL_p para cualquier $p \in M$.
- Dada una geodésica de M perpendicular a una hoja, entonces es perpendicular a todas las hojas que intersecta.

Foliación singular Riemanniana (SRF)

Una **FSR** $(M, \mathcal{F})$ sobre una variedad Riemanniana (compacta) M, es una partición en subvariedades $\mathcal{F} = \{L_p \mid p \in M\}$, llamadas **hojas**, tales que L_p son conexas encajadas, y satisfacen:

- Existe una familia de campos vectoriales X_α diferenciables que generan T_pL_p para cualquier $p \in M$.
- Dada una geodésica de M perpendicular a una hoja, entonces es perpendicular a todas las hojas que intersecta.

La dimensión de las hojas no es en general constante.

Foliaciones singulares Riemannianas

Foliación singular Riemanniana (SRF)

Una **FSR** $(M, \mathcal{F})$ sobre una variedad Riemanniana (compacta) M, es una partición en subvariedades $\mathcal{F} = \{L_p \mid p \in M\}$, llamadas **hojas**, tales que L_p son conexas encajadas, y satisfacen:

- Existe una familia de campos vectoriales X_α diferenciables que generan T_pL_p para cualquier $p \in M$.
- Dada una geodésica de M perpendicular a una hoja, entonces es perpendicular a todas las hojas que intersecta.

La dimensión de las hojas no es en general constante.

Ejemplos:

- Triviales:

Foliación singular Riemanniana (SRF)

Una **FSR** $(M, \mathcal{F})$ sobre una variedad Riemanniana (compacta) M, es una partición en subvariedades $\mathcal{F} = \{L_p \mid p \in M\}$, llamadas **hojas**, tales que L_p son conexas encajadas, y satisfacen:

- Existe una familia de campos vectoriales X_α diferenciables que generan T_pL_p para cualquier $p \in M$.
- Dada una geodésica de M perpendicular a una hoja, entonces es perpendicular a todas las hojas que intersecta.

La dimensión de las hojas no es en general constante.

Ejemplos:

- Triviales:

$$(M, M)$$

Foliación singular Riemanniana (SRF)

Una **FSR** $(M, \mathcal{F})$ sobre una variedad Riemanniana (compacta) M, es una partición en subvariedades $\mathcal{F} = \{L_p \mid p \in M\}$, llamadas **hojas**, tales que L_p son conexas encajadas, y satisfacen:

- Existe una familia de campos vectoriales X_α diferenciables que generan T_pL_p para cualquier $p \in M$.
- Dada una geodésica de M perpendicular a una hoja, entonces es perpendicular a todas las hojas que intersecta.

La dimensión de las hojas no es en general constante.

Ejemplos:

- Triviales:

$$(M, M) \qquad (M, \{p \mid p \in M\})$$

Foliaciones singulares Riemannianas

Foliación singular Riemanniana (SRF)

Una **FSR** $(M, \mathcal{F})$ sobre una variedad Riemanniana (compacta) M, es una partición en subvariedades $\mathcal{F} = \{L_p \mid p \in M\}$, llamadas **hojas**, tales que L_p son conexas encajadas, y satisfacen:

- Existe una familia de campos vectoriales X_α diferenciables que generan T_pL_p para cualquier $p \in M$.
- Dada una geodésica de M perpendicular a una hoja, entonces es perpendicular a todas las hojas que intersecta.

La dimensión de las hojas no es en general constante.

Ejemplos:

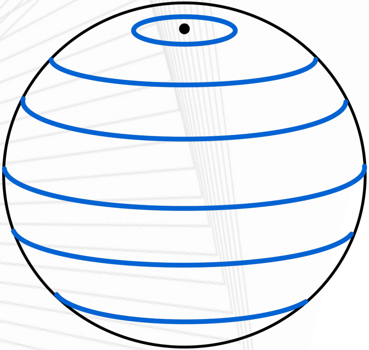
- Triviales:

  $(M, M) \qquad (M, \{p \mid p \in M\})$

- Un grupo de Lie G actuando por isometrías genera una FSR, denotada como **FSR homogénea**.

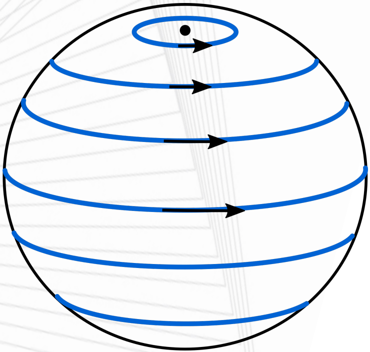
Ejemplo concreto

Consideramos la FSR $(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1)$.



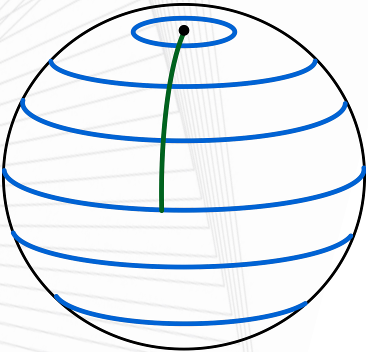
Ejemplo concreto

Campos vectoriales generando las hojas de $(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1)$.



Ejemplo concreto

Geodésica $\perp$ $(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1)$.



Foliaciones singulares Riemannian

Al espacio cociente $M^* = M/\mathcal{F}$ lo llamamos el **espacio de hojas**, y consideramos el **mapeo cociente** $\pi\colon M \to M^*$.

Foliaciones singulares Riemannian

Al espacio cociente $M^* = M/\mathcal{F}$ lo llamamos el **espacio de hojas**, y consideramos el **mapeo cociente** $\pi\colon M \to M^*$.

Una FSR $(M, \mathcal{F})$ es:

- **de dimensión n** si una hoja de dimensión máxima tiene dimensión n;

Foliaciones singulares Riemannian

Al espacio cociente $M^* = M/\mathcal{F}$ lo llamamos el **espacio de hojas**, y consideramos el **mapeo cociente** $\pi : M \to M^*$.

Una FSR $(M, \mathcal{F})$ es:

- **de dimensión n** si una hoja de dimensión máxima tiene dimensión n;
- **de codimensión k** si $k = \dim(M) - \dim(\mathcal{F})$;

Foliaciones singulares Riemannian

Al espacio cociente $M^* = M/\mathcal{F}$ lo llamamos el **espacio de hojas**, y consideramos el **mapeo cociente** $\pi : M \to M^*$.

Una FSR $(M, \mathcal{F})$ es:

- **de dimensión n** si una hoja de dimensión máxima tiene dimensión n;
- **de codimensión k** si $k = \dim(M) - \dim(\mathcal{F})$;
- **cerrada** si todas las hojas son cerradas (en este caso el espacio de hojas es un espacio métrico con una cota inferior de curvatura).

Foliaciones singulares Riemannian

Al espacio cociente $M^* = M/\mathcal{F}$ lo llamamos el **espacio de hojas**, y consideramos el **mapeo cociente** $\pi\colon M \to M^*$.

Una FSR $(M, \mathcal{F})$ es:

- **de dimensión n** si una hoja de dimensión máxima tiene dimensión n;
- **de codimensión k** si $k = \dim(M) - \dim(\mathcal{F})$;
- **cerrada** si todas las hojas son cerradas (en este caso el espacio de hojas es un espacio métrico con una cota inferior de curvatura).
- Si $\mathcal{F}$ es cerrada, entonces $\pi\colon (M, d) \to (M^*, d^*)$ es una submetría.

Foliaciones singulares Riemannian

Al espacio cociente $M^* = M/\mathcal{F}$ lo llamamos el **espacio de hojas**, y consideramos el **mapeo cociente** $\pi\colon M \to M^*$.

Una FSR $(M, \mathcal{F})$ es:

- **de dimensión n** si una hoja de dimensión máxima tiene dimensión n;
- **de codimensión k** si $k = \dim(M) - \dim(\mathcal{F})$;
- **cerrada** si todas las hojas son cerradas (en este caso el espacio de hojas es un espacio métrico con una cota inferior de curvatura).
- Si $\mathcal{F}$ es cerrada, entonces $\pi\colon (M, d) \to (M^*, d^*)$ es una submetría.
- Hojas de dimensión máxima son **hojas regulares**.

Foliaciones singulares Riemannian

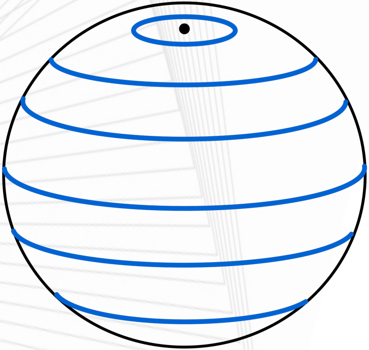
Al espacio cociente $M^* = M/\mathcal{F}$ lo llamamos el **espacio de hojas**, y consideramos el **mapeo cociente** $\pi\colon M \to M^*$.

Una FSR $(M, \mathcal{F})$ es:

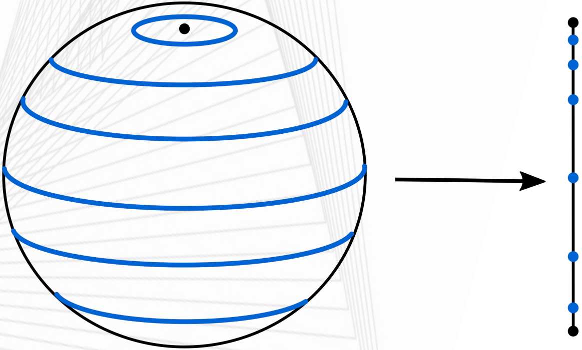
- **de dimensión n** si una hoja de dimensión máxima tiene dimensión n;
- **de codimensión k** si $k = \dim(M) - \dim(\mathcal{F})$;
- **cerrada** si todas las hojas son cerradas (en este caso el espacio de hojas es un espacio métrico con una cota inferior de curvatura).
- Si $\mathcal{F}$ es cerrada, entonces $\pi\colon (M, d) \to (M^*, d^*)$ es una submetría.
- Hojas de dimensión máxima son **hojas regulares**.
- De otra manera son **hojas singulares**.

Ejemplo concreto II

Consideramos la FSR $(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1)$.

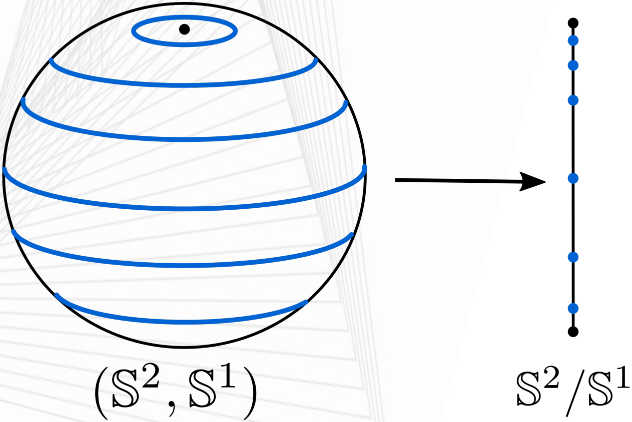


Ejemplo concreto II



$(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1)$ $\qquad$ $\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^1$

Ejemplo concreto II



- Es una foliación homogénea.

Información local de foliaciones singulares Riemannianas

Foliación infinitesimal

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemanniana con hojas cerradas.

- Fijemos $p \in M$.

Foliación infinitesimal

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemanniana con hojas cerradas.

- Fijemos $p \in M$.
- Consideremos la esfera normal $\mathbb{S}_p^\perp$ en p de la hoja L_p.

Foliación infinitesimal

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemanniana con hojas cerradas.

- Fijemos $p \in M$.
- Consideremos la esfera normal $\mathbb{S}_p^\perp$ en p de la hoja L_p.
- Consideramos las componentes conexas de las intersecciones de las hojas de $\mathcal{F}$, con $\exp_p(\mathbb{S}_p^\perp)$.

Foliación infinitesimal

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemanniana con hojas cerradas.

- Fijemos $p \in M$.
- Consideremos la esfera normal $\mathbb{S}_p^{\perp}$ en p de la hoja L_p.
- Consideramos las componentes conexas de las intersecciones de las hojas de $\mathcal{F}$, con $\exp_p(\mathbb{S}_p^{\perp})$.
- Tomamos la preimagenes bajo $\exp_p$ de estas componentes en $\mathbb{S}_p^{\perp}$.

Foliación infinitesimal

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemanniana con hojas cerradas.

- Fijemos $p \in M$.
- Consideremos la esfera normal $\mathbb{S}_p^{\perp}$ en p de la hoja L_p.
- Consideramos las componentes conexas de las intersecciones de las hojas de $\mathcal{F}$, con $\exp_p(\mathbb{S}_p^{\perp})$.
- Tomamos la preimagenes bajo $\exp_p$ de estas componentes en $\mathbb{S}_p^{\perp}$.
- Inducen una foliación singular $\mathcal{F}_p$ sobre $\mathbb{S}_p^{\perp}$.

Foliación infinitesimal

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemanniana con hojas cerradas.

- Fijemos $p \in M$.
- Consideremos la esfera normal $\mathbb{S}_p^\perp$ en p de la hoja L_p.
- Consideramos las componentes conexas de las intersecciones de las hojas de $\mathcal{F}$, con $\exp_p(\mathbb{S}_p^\perp)$.
- Tomamos la preimagenes bajo $\exp_p$ de estas componentes en $\mathbb{S}_p^\perp$.
- Inducen una foliación singular $\mathcal{F}_p$ sobre $\mathbb{S}_p^\perp$.
- Respecto a la métrica redonda, la foliación $(\mathbb{S}_p^\perp, \mathcal{F}_p)$ es una foliación singular Riemanniana (Molino).

Foliación infinitesimal

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemanniana con hojas cerradas.

- Fijemos $p \in M$.
- Consideremos la esfera normal $\mathbb{S}^{\perp}_{p}$ en p de la hoja L_p.
- Consideramos las componentes conexas de las intersecciones de las hojas de $\mathcal{F}$, con $\exp_p(\mathbb{S}^{\perp}_{p})$.
- Tomamos la preimagenes bajo $\exp_p$ de estas componentes en $\mathbb{S}^{\perp}_{p}$.
- Inducen una foliación singular $\mathcal{F}_p$ sobre $\mathbb{S}^{\perp}_{p}$.
- Respecto a la métrica redonda, la foliación $(\mathbb{S}^{\perp}_{p}, \mathcal{F}_p)$ es una foliación singular Riemanniana (Molino).
- Está construcción no depende de $p \in L_p$, solamente de $L = L_p \subset M$.

Foliación infinitesimal

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemanniana con hojas cerradas.

- Fijemos $p \in M$.
- Consideremos la esfera normal $\mathbb{S}_p^\perp$ en p de la hoja L_p.
- Consideramos las componentes conexas de las intersecciones de las hojas de $\mathcal{F}$, con $\exp_p(\mathbb{S}_p^\perp)$.
- Tomamos la preimagenes bajo $\exp_p$ de estas componentes en $\mathbb{S}_p^\perp$.
- Inducen una foliación singular $\mathcal{F}_p$ sobre $\mathbb{S}_p^\perp$.
- Respecto a la métrica redonda, la foliación $(\mathbb{S}_p^\perp, \mathcal{F}_p)$ es una foliación singular Riemanniana (Molino).
- Está construcción no depende de $p \in L_p$, solamente de $L = L_p \subset M$.

La foliación singular Riemanniana $(\mathbb{S}_p^\perp, \mathcal{F}_p)$ es conocida como la **foliación infinitesimal** de L_p.

Foliaciones en esferas redondas

Problema

Clasificación de las foliaciones singulares Riemannianas en $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Foliaciones en esferas redondas

Problema

Clasificación de las foliaciones singulares Riemannianas en $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Élie Cartan comenzó el estudio foliaciones de codimensión 1 en esferas redondas (sigue abierto).

Foliaciones en esferas redondas

Problema

Clasificación de las foliaciones singulares Riemannianas en $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Élie Cartan comenzó el estudio foliaciones de codimensión 1 en esferas redondas (sigue abierto).

Teorema (Radeschi 2012)

Una foliación singular Riemanniana en una esfera redonda $(\mathbb{S}^n, \mathcal{F})$ *de dimensión a lo más* 3 *está dada por una acción de un grupo de Lie.*

Foliaciones en esferas redondas

Problema

Clasificación de las foliaciones singulares Riemannianas en $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Élie Cartan comenzó el estudio foliaciones de codimensión 1 en esferas redondas (sigue abierto).

Teorema (Radeschi 2012)

Una foliación singular Riemanniana en una esfera redonda $(\mathbb{S}^n, \mathcal{F})$ *de dimensión a lo más* 3 *está dada por una acción de un grupo de Lie.*

Teorema (Radeschi 2014, Ferus-Karcher-Münzner 1981)

Existen una familia infinita de foliaciones singulares Riemannianas $(\mathbb{S}^{2\ell-1}, \mathcal{F}_C)$ *que no son homogéneas.*

Problema:

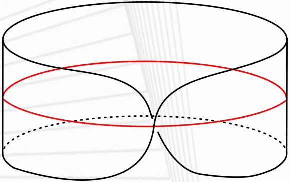
Las hojas se pueden enredar alrededor de una hoja fija L.

Holonomía

Problema:
Las hojas se pueden enredar alrededor de una hoja fija L.

Holonomía

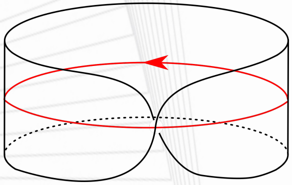
Problema:
Las hojas se pueden enredar alrededor de una hoja fija *L*.



Holonomía

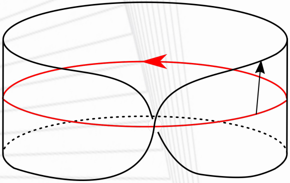
Problema:

Las hojas se pueden enredar alrededor de una hoja fija L.



Holonomía

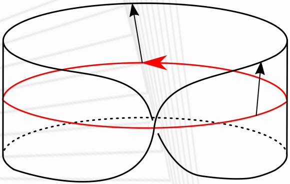
Problema:
Las hojas se pueden enredar alrededor de una hoja fija L.



Holonomía

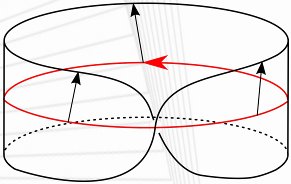
Problema:

Las hojas se pueden enredar alrededor de una hoja fija *L*.



Holonomía

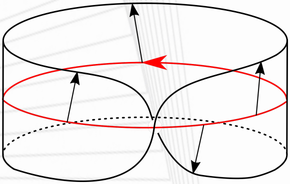
Problema:
Las hojas se pueden enredar alrededor de una hoja fija L.



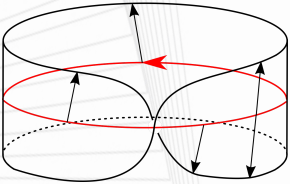
Holonomía

Problema:

Las hojas se pueden enredar alrededor de una hoja fija L.



Problema:
Las hojas se pueden enredar alrededor de una hoja fija *L*.



Holonomía

Problema:
Las hojas se pueden enredar alrededor de una hoja fija L.

Esto implica que para $p \in L$, dos hojas distintas en $(\mathbb{S}_p^{\perp}, \mathcal{F}_p)$ pueden estar contenidas en una misma hoja de $\mathcal{F}$.

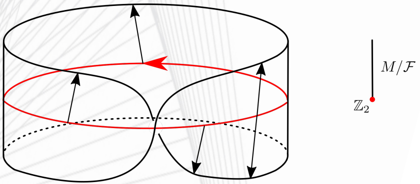
Holonomía

Problema:
Las hojas se pueden enredar alrededor de una hoja fija L.

Esto implica que para $p \in L$, dos hojas distintas en $(\mathbb{S}_p^\perp, \mathcal{F}_p)$ pueden estar contenidas en una misma hoja de $\mathcal{F}$.

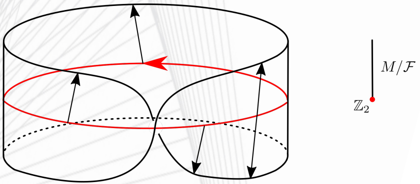
Este efecto es detectado por la holonomía de L.

Holonomia



Tenemos una representación de $\pi_1(L, p)$ en el grupo de isometrías foliadas de $(\mathbb{S}_p^{\perp}, \mathcal{F}_p)$.

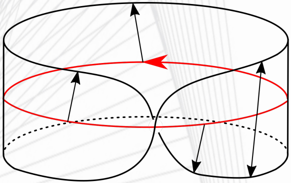
Holonomia

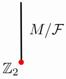


Tenemos una representación de $\pi_1(L, p)$ en el grupo de isometrías foliadas de $(\mathbb{S}_p^\perp, \mathcal{F}_p)$.

$$1 \to K \to \pi_1(L, p) \to \mathrm{Hol}(L) \subset \mathrm{O}(\mathbb{S}_p^\perp) \to 1.$$

Holonomia



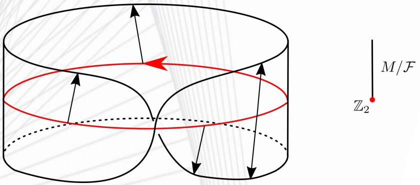


Tenemos una representación de $\pi_1(L, p)$ en el grupo de isometrías foliadas de $(\mathbb{S}_p^\perp, \mathcal{F}_p)$.

$$1 \to K \to \pi_1(L, p) \to \mathrm{Hol}(L) \subset \mathrm{O}(\mathbb{S}_p^\perp) \to 1.$$

Una hoja regular L es **principal** si su holonomía es la representación trivial.

Holonomia



Tenemos una representación de $\pi_1(L, p)$ en el grupo de isometrías foliadas de $(\mathbb{S}_p^\perp, \mathcal{F}_p)$.

$$1 \to K \to \pi_1(L, p) \to \mathrm{Hol}(L) \subset \mathrm{O}(\mathbb{S}_p^\perp) \to 1.$$

Una hoja regular L es **principal** si su holonomía es la representación trivial.

La dimensión de las hojas, y el tipo de holonomia estratifican al espacio de hojas $M/\mathcal{F}$.

Vecindad tubular

Teorema de la rebanada (Mendes y Radeschi 2019)

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemanniana cerrada. Una vecindad tubular de una hoja $L \in \mathcal{F}$ es foliada difeomorfa a:

$$(P \times_{\mathrm{Hol}(L)} \mathbb{D}_p^{\perp}, P \times_{Hol(L)} \mathcal{F}_p).$$

Donde $P \to L$ es un haz $\mathrm{Hol}(L)$-principal.

Vecindad tubular

Teorema de la rebanada (Mendes y Radeschi 2019)

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemanniana cerrada. Una vecindad tubular de una hoja $L \in \mathcal{F}$ es foliada difeomorfa a:

$$(P \times_{\mathrm{Hol}(L)} \mathbb{D}_p^{\perp}, P \times_{Hol(L)} \mathcal{F}_p).$$

Donde $P \to L$ es un haz $\mathrm{Hol}(L)$-principal.

$$P \times_{\mathrm{Hol}(L)} \mathbb{D}_p^{\perp} = (P \times \mathbb{D}_p^{\perp})/\mathrm{Hol}(L), \quad P \times_{Hol(L)} \mathcal{F}_p = (P \times \mathcal{F}_p)/Hol(L).$$

=1

Vecindad tubular

Teorema de la rebanada (Mendes y Radeschi 2019)

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemanniana cerrada. Una vecindad tubular de una hoja $L \in \mathcal{F}$ es foliada difeomorfa a:

$$(P \times_{\mathrm{Hol}(L)} \mathbb{D}_p^{\perp}, P \times_{Hol(L)} \mathcal{F}_p).$$

Donde $P \to L$ es un haz $\mathrm{Hol}(L)$-principal.

$$P \times_{\mathrm{Hol}(L)} \mathbb{D}_p^{\perp} = (P \times \mathbb{D}_p^{\perp})/\mathrm{Hol}(L), \quad P \times_{Hol(L)} \mathcal{F}_p = (P \times \mathcal{F}_p)/Hol(L).$$

Problema

¿Como podemos pegar vecindades tubulares para tener una métrica foliada?

Foliaciones por toros

Fibraciones de Seifert, generalización de acciones por toros.

Estructura local de la foliación

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación con hojas principales homeomorfas a toros de dimensión n, en una variedad simplemente conexa.

Estructura local de la foliación

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación con hojas principales homeomorfas a toros de dimensión n, en una variedad simplemente conexa.

Fijemos L una hoja de dimensión $n - \ell$.

Estructura local de la foliación

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación con hojas principales homeomorfas a toros de dimensión n, en una variedad simplemente conexa.

Fijemos L una hoja de dimensión $n - \ell$.

Teorema (– 2018)

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación por toros en una variedad simplemente conexa. Entonces cualquier hoja $L \in \mathcal{F}$ tiene al toro como una cubierta finita:

$$T^\ell \to T^\ell/\mathrm{Hol}(L) \cong L.$$

Estructura local de la foliación

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación con hojas principales homeomorfas a toros de dimensión n, en una variedad simplemente conexa.

Fijemos L una hoja de dimensión $n - \ell$.

Teorema (– 2018)

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación por toros en una variedad simplemente conexa. Entonces cualquier hoja $L \in \mathcal{F}$ tiene al toro como una cubierta finita:

$$T^\ell \to T^\ell / \mathrm{Hol}(L) \cong L.$$

Sea $p \in L$ y $v \in \mathbb{S}_p^\perp$ tal que para $q = \exp_p(v) \in M$ la hoja L_q es principal. Entonces tenemos una submersion:

$$\mathcal{L}_v \to L_q = T^n \to T^{n-\ell}.$$

Estructura local de la foliación

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación con hojas principales homeomorfas a toros de dimensión n, en una variedad simplemente conexa.

Fijemos L una hoja de dimensión $n - \ell$.

Teorema (– 2018)

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación por toros en una variedad simplemente conexa. Entonces cualquier hoja $L \in \mathcal{F}$ tiene al toro como una cubierta finita:

$$T^\ell \to T^\ell / \mathrm{Hol}(L) \cong L.$$

Sea $p \in L$ y $v \in \mathbb{S}_p^\perp$ tal que para $q = \exp_p(v) \in M$ la hoja L_q es principal. Entonces tenemos una submersion:

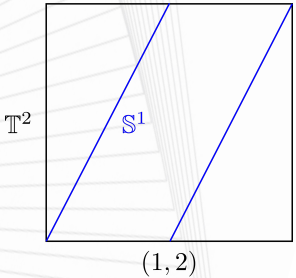
$$\mathcal{L}_v \to L_q = T^n \to T^{n-\ell}.$$

Via la sucesión exacta larga de grupos de homotopía concluimos que $\mathcal{L}_v$ es un toro T^ℓ.

Este toro $\mathcal{L}_v = T^\ell$ está determinado por una lista de vectores $a_1, \ldots, a_\ell \in \mathbb{Z}^n$.

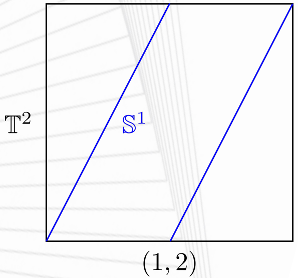
Este toro $\mathcal{L}_v = T^\ell$ está determinado por una lista de vectores $a_1, \ldots, a_\ell \in \mathbb{Z}^n$.

Por ejemplo $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^1$:



Este toro $\mathcal{L}_v = T^\ell$ está determinado por una lista de vectores $a_1, \ldots, a_\ell \in \mathbb{Z}^n$.

Por ejemplo $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^1$:



$$1 \to \pi_1(\mathcal{L}_v) = \mathbb{Z}^\ell \to \pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n \to \pi_1(T^{n-\ell}) \to 1.$$

Estructura local de la foliación

Recordamos que para la hoja L de dimensión $k - \ell$ tenemos:

$$T^{n-\ell} \to T^{n-\ell}/\mathrm{Hol}(L) \cong L.$$

Estructura local de la foliación

Recordamos que para la hoja L de dimensión $k-\ell$ tenemos:

$$T^{n-\ell} \to T^{n-\ell}/\mathrm{Hol}(L) \cong L.$$

Proposición

Dada una foliación por toros de dimensión n en una variedad compacta y simplemente conexa, una hoja de dimensión $n-\ell$ está determinada por los vectores $a_1, \ldots, a_\ell \in \mathbb{Z}^n$ y el grupo $\mathrm{Hol}(L)$.

Estructura local de la foliación

Teorema de la rebanada (Mendes y Radeschi 2019)

Sea $(M, \mathcal{F})$ *una foliación singular Riemannianana cerrada. Una vecindad tubular de una hoja* $L \in \mathcal{F}$ *es foliada difeomorfa a:*

$$P \times_{\mathrm{Hol}(L)} \mathbb{S}_p^{\perp}.$$

Donde $P \to L$ *es un haz* $\mathrm{Hol}(L)$*-principal.*

Estructura local de la foliación

Teorema de la rebanada (Mendes y Radeschi 2019)

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemannianana cerrada. Una vecindad tubular de una hoja $L \in \mathcal{F}$ es foliada difeomorfa a:

$$P \times_{\mathrm{Hol}(L)} \mathbb{S}_p^{\perp}.$$

Donde $P \to L$ es un haz $\mathrm{Hol}(L)$-principal.

En el caso de la foliación por toros de dimensión n, en una variedad simplemente conexa:

- Fijemos una hoja L de dimensión $n - \ell$.

Estructura local de la foliación

Teorema de la rebanada (Mendes y Radeschi 2019)

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemannianana cerrada. Una vecindad tubular de una hoja $L \in \mathcal{F}$ es foliada difeomorfa a:

$$P \times_{\mathrm{Hol}(L)} \mathbb{S}_p^{\perp}.$$

Donde $P \to L$ es un haz $\mathrm{Hol}(L)$-principal.

En el caso de la foliación por toros de dimensión n, en una variedad simplemente conexa:

- Fijemos una hoja L de dimensión $n - \ell$.
- El espacio P corresponde al toro $T^{n-\ell} \to T^{k-\ell}/\mathrm{Hol}(L) = L$.

Estructura local de la foliación

Teorema de la rebanada (Mendes y Radeschi 2019)

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemannianana cerrada. Una vecindad tubular de una hoja $L \in \mathcal{F}$ es foliada difeomorfa a:

$$P \times_{\mathrm{Hol}(L)} \mathbb{S}_p^{\perp}.$$

Donde $P \to L$ es un haz $\mathrm{Hol}(L)$-principal.

En el caso de la foliación por toros de dimensión n, en una variedad simplemente conexa:

- Fijemos una hoja L de dimensión $n - \ell$.
- El espacio P corresponde al toro $T^{n-\ell} \to T^{k-\ell}/\mathrm{Hol}(L) = L$.
- P está determinado entonces por los vectores $a_1, \ldots, a_\ell \in \mathbb{Z}^n$.

Estructura local de la foliación

Teorema de la rebanada (Mendes y Radeschi 2019)

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación singular Riemannianana cerrada. Una vecindad tubular de una hoja $L \in \mathcal{F}$ es foliada difeomorfa a:

$$P \times_{\mathrm{Hol}(L)} \mathbb{S}_p^{\perp}.$$

Donde $P \to L$ es un haz $\mathrm{Hol}(L)$-principal.

En el caso de la foliación por toros de dimensión n, en una variedad simplemente conexa:

- Fijemos una hoja L de dimensión $n - \ell$.
- El espacio P corresponde al toro $T^{n-\ell} \to T^{k-\ell}/\mathrm{Hol}(L) = L$.
- P está determinado entonces por los vectores $a_1, \ldots, a_\ell \in \mathbb{Z}^n$.

La vecindad tubular de L está determinada por $(a_1, \ldots, a_\ell, \mathrm{Hol}(L))$.

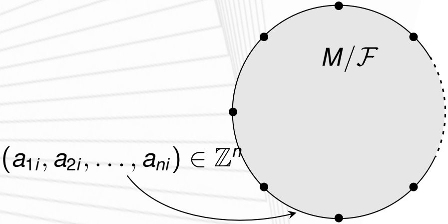
Espacio de hojas con invariantes

Consideramos $(M, \mathcal{F})$ una foliación por toros sobre una variedad compacta, simplemente conexa, y consideramos $M/\mathcal{F}$ junto con la información $\{(a_1(L), \ldots, a_k(L), \mathrm{Hol}(L)) \mid L \in \mathcal{F}\}$.

Espacio de hojas con invariantes

Consideramos $(M, \mathcal{F})$ una foliación por toros sobre una variedad compacta, simplemente conexa, y consideramos $M/\mathcal{F}$ junto con la información $\{(a_1(L), \ldots, a_k(L), \mathrm{Hol}(L)) \mid L \in \mathcal{F}\}$.

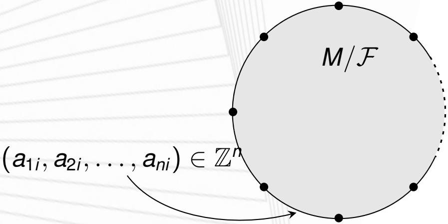
Ejemplo: Codimensión 2 con hojas singulares



Espacio de hojas con invariantes

Consideramos $(M, \mathcal{F})$ una foliación por toros sobre una variedad compacta, simplemente conexa, y consideramos $M/\mathcal{F}$ junto con la información $\{(a_1(L), \ldots, a_k(L), \mathrm{Hol}(L)) \mid L \in \mathcal{F}\}$.

Ejemplo: Codimensión 2 con hojas singulares



Pregunta

¿Los invariantes locales determinan la variedad y/o foliación?

Clasificación

Definición

Una sección para una foliación $(M, \mathcal{F})$ *es un mapa continuo* $\sigma\colon M/\mathcal{F} \to M$*, tal que:*

$$\mathrm{Id}_{M/\mathcal{F}} = \pi \circ \sigma\colon M/\mathcal{F} \to M \to M/\mathcal{F}.$$

Clasificación

Definición

Una sección para una foliación $(M, \mathcal{F})$ *es un mapa continuo* $\sigma\colon M/\mathcal{F} \to M$*, tal que:*

$$\mathrm{Id}_{M/\mathcal{F}} = \pi \circ \sigma\colon M/\mathcal{F} \to M \to M/\mathcal{F}.$$

Teorema (– 2018)

Sean $(M_1, \mathcal{F}_1)$ *y* $(M_2, \mathcal{F}_2)$ *foliaciones por toros sobre variedades compactas, simplemente conexas. Supongamos que para* $i = 1, 2$ *existen secciones* $\sigma_i\colon M_i/\mathcal{F}_i \to M_i$*. Si* $M_1/\mathcal{F}_1$ *es homeomorfo a* $M_2/\mathcal{F}_2$ *y este homeomorfísmo preserva los invariantes* $\{(a_1(L), \dots, a_k(L), \mathrm{Hol}(L)) \mid L \in \mathcal{F}_i\}$*, entonces* $(M_1, \mathcal{F}_1)$ *es foliada homeomorfa a* $(M_2, \mathcal{F}_2)$*.*

Problemas

- ¿Sistema transnormal: $(M, \mathcal{F}, d_g) \to (M/\mathcal{F}, d^*)$ submetría, implica que $\mathcal{F}$ es una foliación singular suave? I.e. ¿T_pL_p varia de manera suave con respecto a p?.

Problemas

- ¿Sistema transnormal: $(M, \mathcal{F}, d_g) \to (M/\mathcal{F}, d^*)$ submetría, implica que $\mathcal{F}$ es una foliación singular suave? I.e. ¿T_pL_p varia de manera suave con respecto a p?.
- Clasificación de foliaciones infinitesimales $(\mathbb{S}^n, \mathcal{F})$ de baja codimensión.

Problemas

- ¿Sistema transnormal: $(M, \mathcal{F}, d_g) \to (M/\mathcal{F}, d^*)$ submetría, implica que $\mathcal{F}$ es una foliación singular suave? I.e. ¿T_pL_p varia de manera suave con respecto a p?.
- Clasificación de foliaciones infinitesimales $(\mathbb{S}^n, \mathcal{F})$ de baja codimensión.
- Las secciones intuitivamente nos permiten pegar vecindades tubulares. ¿Hay otras maneras?

Problemas

- ¿Sistema transnormal: $(M, \mathcal{F}, d_g) \to (M/\mathcal{F}, d^*)$ submetría, implica que $\mathcal{F}$ es una foliación singular suave? I.e. ¿$T_p L_p$ varia de manera suave con respecto a p?.
- Clasificación de foliaciones infinitesimales $(\mathbb{S}^n, \mathcal{F})$ de baja codimensión.
- Las secciones intuitivamente nos permiten pegar vecindades tubulares. ¿Hay otras maneras?
- ¿Existen particiones $\mathcal{C}^\infty$ de la unidad foliadas?

Problemas

- ¿Sistema transnormal: $(M, \mathcal{F}, d_g) \to (M/\mathcal{F}, d^*)$ submetría, implica que $\mathcal{F}$ es una foliación singular suave? I.e. ¿T_pL_p varia de manera suave con respecto a p?.
- Clasificación de foliaciones infinitesimales $(\mathbb{S}^n, \mathcal{F})$ de baja codimensión.
- Las secciones intuitivamente nos permiten pegar vecindades tubulares. ¿Hay otras maneras?
- ¿Existen particiones $\mathcal{C}^\infty$ de la unidad foliadas?

Gracias por su atención