Los distintos modelos del complejo de conmutividad afín de un grupo

Luis Eduardo García Hernández
IMUNAM

26 de marzo del 2021

1 Introducción.

1. Introducción.
2. El complejo de conmutatividad Afín
3. Otros complejos simpliciales definidos en un grupo.

Introducción

Definición [A. Adem, F. R. Cohen y E. Torres-Giese]

Para un grupo topológico G se define $B_{com}G$ como la realización geometrica del conjunto simplicial siguiente

$$\{(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n | g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i \text{ para cada } i, j\}$$

los mapeos que dotan de estructura simplicial son

$$(g_1, g_2, \ldots, g_i, g_{i+1}, \ldots, g_n) \to (g_1, g_2, \ldots, g_i \cdot g_{i+1}, \ldots, g_n)$$
$$(g_1, g_2, \ldots, g_i, g_{i+1}, \ldots, g_n) \to (g_1, g_2, \ldots, g_i, e, g_{i+1}, \ldots, g_n)$$

Este espacio es conocido como *espacio clasificante para conmutatividad de* G.

Introducción

Definición [A. Adem, F. R. Cohen y E. Torres-Giese]

Para un grupo topológico G las inclusiones

$$\{(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n | g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i \text{ para cada } i, j\} \to G^n$$

inducen un mapeo canonico

$$B_{com}G \to BG$$

A la fibra homotopica del haz principal $EG \to BG$ a lo largo de este mapeo se le denota $E_{com}G$.

El complejo de conmutatividad Afín

Definición. [O Antolin y B Villareal]

Para un grupo G se dice que un subconjunto finito

$$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\} \subset G$$

es un conjunto afinmente conmutativo si los elementos $s_0^{-1}s_1, s_1^{-1}s_2, \ldots, s_{n-1}^{-1}s_n$ conmutan dos a dos.

El complejo de conmutatividad Afín

Definición. [O Antolin y B Villareal]

Para un grupo G se dice que un subconjunto finito

$$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\} \subset G$$

es un conjunto afinmente conmutativo si los elementos $s_0^{-1}s_1, s_1^{-1}s_2, \ldots, s_{n-1}^{-1}s_n$ conmutan dos a dos.

De forma equivalente esto se puede expresar diciendo que existe un subgrupo abeliano A de G tal que S esta contenido en una clase lateral de A.

El complejo de conmutatividad Afín

Definición. [O Antolin y B Villareal]

Para un grupo G se dice que un subconjunto finito

$$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\} \subset G$$

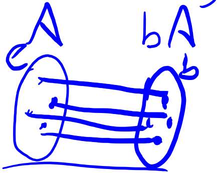
es un conjunto afinmente conmutativo si los elementos $s_0^{-1}s_1, s_1^{-1}s_2, \ldots, s_{n-1}^{-1}s_n$ conmutan dos a dos.
De forma equivalente esto se puede expresar diciendo que existe un subgrupo abeliano A de G tal que S esta contenido en una clase lateral de A.

Para G finito, el complejo simplicial formado por vértices los elementos de G y simplejos los conjuntos afinmente conmutativos es llamado *Complejo de conmutatividad Afín* y es denotado por $AfComG$

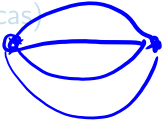
$D_8=\{a,b \mid a^4=e,\ b^2=e,\ bab^{-1}=a^{-1}\}$

$A=\{e,a,a^2,a^3\}$

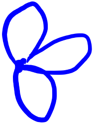
$B\{e,b\}$



$\simeq$



$\simeq$



$AbCoG$

Definición.

Para un grupo G denotamos por $AbCoG$ al COPO

$$\{gA \mid g \in G,\ A \text{ es subgrupo abeliano de } G\}$$

ordenado por contención.

mAbCoG

Definición.

Para un grupo G denotamos por *mAbCoG* al COPO

$$\{gA \mid g \in G,\ A \text{ es intersección de subgrupos abelianos maximales de } G\}$$

ordenado por contención.

$MComG$

Definición.

Para un grupo G denotamos por $MComG$ al complejo simplicial cuyos vertices son clases laterales de subgrupos abelianos maximales y un conjunto de vértices es simplejo si la intersección de las clases laterales es no vacia

Las equivalencias homotopicas

Teorema [H. Abels y S. Holz]

Las realizaciones Geométricas de los siguientes complejos simpliciales

1. $AfComG$
2. $N(AbCoG)$
3. $N(mAbCoG)$
4. $MComG$

son homotopicamente equivalentes.

Ideas de las pruebas

$$|\mathrm{Aff}_m(G)| \simeq \underbrace{|N(\mathrm{Ab}_o G)|} \simeq |N(m\mathrm{Ab}_o G)|$$

$$\wr$$

$$|M_{om} G|$$

Relación con $E_{com}G$.

Teorema [O. Antolin y B. Villareal, ..., -]

Para G un grupo discreto, las realizaciones geométricas de los complejos antes discutidos son todos modelos de $E_{com}G$.

Idea de la prueba

$$E_{com}G \simeq |N(Ab\,C_0\,G)|$$

$G/A \qquad A \leq G \qquad \varepsilon^0$

G/L'

$$\underline{BA \longrightarrow BG} \qquad B_{com}G$$

$$B_{com}G = \bigcup_{A \in AbG} BA = \underset{A \in AbG}{\operatorname{colim}} BA$$

$$\{gS \mid g \in G,\ S \in Ab\}$$

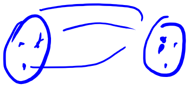
Bibliografía.

- A. Adem, F. Cohen y E. Torres-Giese. *Commuting elements, simplicial spaces and filtrations of classifying spaces*. Math. Proc. Cambridge Philos, 2012.
- A. Adem y J. M. Gómez. *A classifying space for commutativity in Lie groups. Algebr. Geom. Topol.* 2015.
- O. Anbtolin y B. Villareal, *The Complex of Affinely Commutative Sets*, Arxiv, 2019.
- H. Abels y S. Holz. *Higher generation by subgroups*. J. Algebra. 1993.

¡MUCHAS GRACIAS!

A pensar un poco

- ¿Cuál es el tipo de homotopía de $E_{com}S_3$?



A pensar un poco

- ¿Cuál es el tipo de homotopía de $E_{com}Q_{2n}$?

A pensar un poco

- ¿Cuál es el tipo de homotopía de $E_{com}S_4$?