Modelos de Sullivan y el problema de las geodésicas

Jaime Alejandro García Villeda
IMUNAM-CU

Séptimas jornadas de Geometría, Topología y Dinámica

16 de diciembre del 2021

El problema de las geodésicas que nos interesa:
¿Toda variedad riemanniana compacta de dimensión al menos dos admite una cantidad infinita de geodésicas cerradas geométricamente distintas?

Notas:

- Por geodésica cerrada en M nos referimos a una geodésica, $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$ y $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(1)$.
- Dos geodésicas $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to M$ son geométricamente distintas si $\gamma_1([0,1]) \neq \gamma_2([0,1])$

Quizá resolver el problema puede ser difícil, pero buscaremos algunas condiciones que impliquen el resultado para ciertas familias.

2. Algunas (muy pocas) soluciones de "interés" respecto a existencia de geodésicas cerradas.

Con ideas de minimización:

- (Lusternik y Fet) Toda variedad suave compacta simplemente conexa tiene una geodésica cerrada no trivial.

Este se basa en considerar el espacio de lazos libres de la variedad, $LM := \mathbf{Top}(S^1, M)$, y notar que por un resultado de Klingenderg, la inclusión $\iota : \mathcal{H}(S^1, M) \hookrightarrow LM$ es una equivalencia homotópica. Aquí, $\mathcal{H}(S^1, M)$ es la variedad de Hilbert cuyos elementos son funciones $S^1 \to M$ absolutamente continuas con derivada cuadrado integrable en norma.

La idea básica es definir una funcional de energía y encontrar los mínimos de esta, los cuales son las geodésicas buscadas o curvas constantes.

Con una condición algebraica:

- (Hadamar y Cartan) Si M es una de tales variedades, toda clase de conjugación no trivial de $\pi_1(M)$ contiene una geodésica cerrada.
- (Bangert y Hingston) Cuando $\pi_1(M)$ tiene como subgrupo de índice finito a $\mathbb{Z}$, existen una cantidad infinita de geodésicas geométricamente distintas.

Para un ejemplo particular:

- Como consecuencia de los trabajos de:
  1. Bangert en "On the existence of closed geodesics on two-spheres"
  2. Franks "Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms"
  3. Hingston "On the growth of the number of closed geodesics on the two-sphere",

  se prueba al inicio de los 90's que hay una cantidad infinita de geodésicas cerradas en S^2 con cualquier métrica.

Y hay muchos otros resultados ...

El siguiente resultado aparece en el artículo "Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds" (ver [2]):

Teorema (Gromoll & Meyer)

Sea M una variedad riemanniana compacta y simplemente conexa de dimensión al menos 2. Si la sucesión de números de Betti de LM, $\{b_k(LM)\}_{k=0}^{\infty}$, es no acotada, entonces M admite una cantidad infinita de geodésicas geométricamente distintas.

Nota:

- El argumento de Gromoll y Meyer se basa en el uso de una teoría de Morse para variedades de Hilbert usando nuevamente el resultado de Klingenderg (la inclusión $\iota : \mathcal{H}(S^1, M) \hookrightarrow LM$ es una equivalencia homotópica)

Ejemplo

Para G un grupo de Lie compacto y simplemente conexo, se tiene un isomorfismo

$$H^*(LG;\mathbb{Q}) = H^*(G;\mathbb{Q}) \otimes H^*(\Omega G;\mathbb{Q})$$

Además,

$$H^*(G;\mathbb{Q}) = \Lambda(x_{2p_1+1}, ..., x_{2p_r+1})$$

$$H^*(\Omega G;\mathbb{Q}) = \Lambda(sx_{2p_1+1}, ..., sx_{2p_r+1})$$

$|x_{2p_i+1}| = 2p_i + 1$ *y* $|sx_{2p_i+1}| = 2p_i$. *Además,* $r = rank(G)$.

De esto se deduce que los números de Betti de LG *son no acotados si y sólo si* $rank(G) \geq 2$.

Por lo tanto, para grupos de Lie compactos y simplemente conexos con rango mayor o igual a 2 (por ejemplo $SU(n)$ *para* $n \geq 3$*), el resultado de Gromoll & Meyer aplica.*

La hipótesis sobre los números de Betti en el teorema de Gromoll y Meyer puede ser complicada de estudiar pues esta es una propiedad de LM y no de M.

Aquí es donde entran Sullivan y Vigué-Poirrier, quienes dan una caracterización de las hipótesis del teorema de Gromoll y Meyer.

Teorema (Sullivan & Vigué-Poirrier)

Sea X un espacio simplemente conexo cuya cohomología racional es de tipo finito. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *La sucesión de números de Betti de LX es no acotada.*
2. *El álgebra de cohomología $H^*(X;\mathbb{Q})$ requiere al menos dos generadores.*

A continuación vamos a dar los ingredientes para intentar entender la idea de demostración de este teorema.

Pero antes ... una pequeña nota de ubicación temporal:

El artículo de Sullivan & Vigue-Poirrier de 1976 ([5]) aparece entre el periodo de 1975 ([3]) y 1977 ([4]), que son los años en los que Sullivan desarrolla su formulación de la teoría de homotopía racional para espacios simplemente conexos, la cual es equivalente a la de Quillen publicada en 1968.

El verdadero objetivo de esta charla es introducir el ingrediente básico de la formulación de Sullivan de la homotopía racional (la idea de modelo mínimo) y ver como aparece este en su teorema con Vigué-Poirrier.

Primero requerimos hacer una construcción muy especial.

Definamos Ω una $CDGA_{\mathbb{Q}}$-simplicial como sigue:

- Para $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n = \Lambda_{\mathbb{Q}}(t_0, ..., t_n, dt_0, ..., dt_n)/I_n$, donde $|t_i| = 0$, $|dt_i| = 1$ e I_n es el ideal generado por $\sum_{i=0}^{n} t_i - 1$ y $\sum_{i=0}^{n} dt_i$.
- Operadores de cara

$$\partial_i : \Omega_n \to \Omega_{n-1}$$

$$\partial_i(t_j) = \begin{cases} t_j, & \text{Si } j < i \\ 0, & \text{Si } i = j \\ t_{j-1}, & \text{Si } i < j \end{cases}$$

- Operadores de degeneración

$$s_i : \Omega_n \to \Omega_{n+1}$$
$$s_i(t_j) = \begin{cases} t_j, & \text{Si } j < i \\ t_i + t_{i+1}, & \text{Si } i = j \\ t_{j+1}, & \text{Si } i < j \end{cases}$$

Note que con estos ingredientes se define una diferencial, $d : \Omega_n \to \Omega_n$, para que $d(t_i) = dt_i$, lo cual da a Ω la estructura de $CDGA_{\mathbb{Q}}$-simplicial mencionada.

A Ω se le llama el **álgebra de formas diferenciales polinomiales** (sobre $\mathbb{Q}$).

Para X un espacio topológico se define:

$$A_{PL}(X) := \mathbf{sSet}(\mathcal{S}(X), \Omega),$$

donde $\mathcal{S}$ es el funtor conjunto singular. A $A_{PL}(X)$ se le conoce como el **álgebra de formas diferenciales de De Rham lineales por tramos** (con coeficientes en $\mathbb{Q}$) del espacio X.

Además, esta definición muestra que $A_{PL}(\_)$ da lugar a un funtor:

$$A_{PL} : \mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{CDGA}_{\mathbb{Q}}$$
$$A_{PL}(\_) = \mathbf{sSet}(\mathcal{S}(\_), \Omega)$$

Un resultado importante es:

Teorema de Stokes-De Rham polinomial

Para X espacio topológico existe un isomorfismo como $\mathbb{Q}$-álgebras:

$$H^*(A_{PL}(X); \mathbb{Q}) \cong H^*(X; \mathbb{Q})$$

Definición

1. *Un álgebra de Sullivan (sobre $\mathbb{Q}$) es una $CDGA_{\mathbb{Q}}$ de la forma $(\Lambda V, d)$ tal que:*
   - *V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial graduado.*
   - *$V = \bigcup_{i=0}^{\infty} V(i)$ con $V(i)$ espacios vectoriales graduados tales que para cada $i \in \mathbb{N}$, $V(i) \subseteq V(i+1)$. Además, $d|_{V(0)} = 0$ y para $i \geq 1$, $d| : V(i) \to \Lambda V(i-1)$.*
2. *Un modelo de Sullivan para una $CDGA_{\mathbb{Q}}$ (A, d), es un cuasi-isomorfismo con un álgebra de Sullivan:*

$$m : (\Lambda V, d) \to (A, d)$$

Un modelo de Sullivan $(\Lambda V, d)$ es mínimo si $\mathrm{im}(d) \subseteq (\Lambda^+ V)(\Lambda^+ V)$, donde $\Lambda^+ V = \bigoplus_{i \geq 1} \Lambda^i V$.

La asociación de un objeto algebraico a uno topológico permite plantear lo siguiente:

Definición

Para X espacio topológico, un modelo (mínimo) de Sullivan para X es un modelo (mínimo) de Sullivan para $A_{PL}(X)$.

Hay un teorema de existencia y unicidad de modelos mínimos para espacios conexos. Pero lo más importante de esto es tener resultados para poder calcularlos. Por ejemplo el siguiente debido a Sullivan (ver [3]).

Proposición

Sea X un espacio simplemente conexo con modelo mínimo $M_X = (\Lambda V, d)$. Entonces el modelo mínimo para el espacio de lazos libres LX está dado por $M_{LX} = (\Lambda V \otimes \Lambda sV, D)$, donde $D(v) = d(v)$, $D(sv) = -sd(v)$ y s la diferencial tal que $s(v) = sv$.

Ejemplo

Considere $X = S^2$. *Se sabe que el modelo mínimo de este espacio es* $(\Lambda(x,y), d)$ *con* $d(x) = 0$, $d(y) = x^2$ *y* $|x| = 2$. *Por lo tanto, el modelo mínimo de* LS^2 *está dado por* $(\Lambda(x,y,x',y'), D)$ *donde* $x' := sx$, $y' := sy$, *por lo que* $|x'| = 1$ *y* $|y'| = 2$. *Además,* $D(x) = 0$, $D(y) = x^2$, $D(x') = 0$ *y* $D(y') = -sd(y) = -s(x^2) = -2xx'$.

Observe que con esto uno puede calcular la cohomología de LM, *pues esta está dada por*

$$H^*(LM;\mathbb{Q}) = \langle x, x', x'y', xy' - 2x'y, x'y'^2, \ldots\rangle$$

De esto se puede demostrar que para todo $i \geq 1$,

$$\dim H^i(LM;\mathbb{Q}) = 1$$

Notas:

- El ejemplo anterior muestra que el converso del teorema de Gromoll & Meyer no es cierto pues S^2 tiene una cantidad infinita de geodésicas, pero sus números de Betti son acotados.
- El cálculo anterior pone en manifiesto como se obtiene en la práctica del modelo mínimo la cohomología del espacio en cuestión. Esta es la esencia en la prueba del teorema de Sullivan & Vigué-Poirrier.
- Para los que saben un poco de homotopía racional: LM no es un espacio formal pues hay productos de Massey no triviales como $xx' - 2x'y \in \langle [-2x'], [x], [x] \rangle$, de ahí la importancia del resultado de construcción del modelo mínimo de LX.

Demostración

$1 \Rightarrow 2)$ *Por contrapositiva, suponemos que* $H^*(X;\mathbb{Q})$ *es generado por un elemento. De acuerdo a la paridad del grado del generador, tenemos dos casos:*

<u>Caso 1:</u> $H^*(X;\mathbb{Q}) = \Lambda(x)$ *con* $|x| = 2n+1$. *El modelo mínimo de* X *es* $M_X = (\Lambda x, d = 0)$. *Entonces, el modelo mínimo de* LX *es* $M_{LX} = (\Lambda(x,\tilde{x}),\delta)$ *con* $\delta(x) = 0$ *y* $\delta(\tilde{x}) = 0$, *con* $|\tilde{x}| = 2n-1$. *Entonces los números de Betti son acotados pues estos son* 0 *ó* 1.

<u>Caso 2:</u> $H^*(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[y]/(y^k)$ *con* $|y| = 2n$. *En este caso el modelo mínimo de* X *es* $M_X = (\Lambda(y,z),d)$ *con* $dy = 0$ *y* $dz = y^k$. *Luego, el modelo mínimo de* LX *es* $M_{LX} = (\Lambda(y,z,\tilde{y},\tilde{z}),\delta)$ *con* $\delta(y) = \delta(\tilde{y}) = 0$, $\delta(z) = y^k$, $\delta(\tilde{z}) = -ky^{k-1}\tilde{y}$.

Como el ideal generado por z *y* y^k *es acíclico, entonces el modelo mínimo es cuasi-isomorfo con*

$$(\Lambda(y,\tilde{y})/(y^k) \otimes \Lambda\tilde{z},\hat{\delta})$$

Continuación de la demostración

donde $\hat{\delta}(\hat{z}) = -ky^{k-1}\hat{y}$. *Al calcular la cohomología se deduce que:*

$$H^*(LM;\mathbb{Q}) = \Lambda^+(y,\tilde{y})/(y^k, y^{k-1}\tilde{y}) \otimes \Lambda\tilde{z}$$

De esto se deduce el resultado.

$2 \Rightarrow 1)$ *Suponemos que el modelo de* X *tiene al menos dos generadores de grado impar, y sean* y_1, y_2 *los primeros dos de ellos respecto al grado. Escribamos los generadores del modelo mínimo de forma creciente (de acuerdo al grado) como*

$$x_1, \ldots, x_n, y_1, x_{n+1}, \ldots, x_r, y_2, \ldots$$

La diferencial está dada por polinomios con coeficientes racionales $P_1, Q_1, \ldots, Q_r, P_2$ *como:*

$$dx_1 = \cdots = dx_n = 0$$

Continuación de la demostración

$$dy_1 = P_1(x_1, ..., x_n)$$

$$dx_{n+1} = y_1 Q_1(x_1, ..., x_n)$$

$$dx_r = y_1 Q_r(x_1, ..., x_{r-1})$$

$$dy_2 = P_2(x_1, ..., x_r)$$

Si J es el ideal generado por $x_1, ..., x_r$, entonces este es un ideal diferencial en M_{LX}, y el cociente es la CDGA mínima $(\Lambda(y_1, y_2, ...) \otimes \Lambda sV, \delta)$. En este cociente, las clases de elementos $\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_r \hat{y}_1{}^p \hat{y}_2{}^q$ son cociclos linealmente independientes entre sí en cohomología. Esto muestra que los números de Betti de $(\Lambda(y_1, y_2, ...) \otimes \Lambda sV, \delta)$ son no acotados y por lo tanto lo mismo sucede con LX.

$\square$

7. Recapitulación de los teoremas

De forma moderna el teorema de Sullivan & Vigué-Poirrier (ver [1]) se enuncia como:

Teorema (Sullivan & Vigué-Poirrier)

Sea X un espacio simplemente conexo cuya cohomología racional es finitamente dimensional. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *La sucesión de números de Betti de LX es no acotada.*
2. *El álgebra de cohomología $H^*(X;\mathbb{Q})$ requiere al menos dos generadores.*
3. *La dimensión de $\pi_{par}(X) \otimes \mathbb{Q}$ es al menos 2.*

Respecto al problema de las geodésicas planteado tenemos lo siguiente:

Corolario

Si M es una variedad riemanniana compacta y simplemente conexa con dimensión al menos dos cuya álgebra de cohomologia racional requiere al menos dos generadores, entonces M tiene una cantidad infinita de geodésicas cerradas geométricamente distintas.

Note que además del resultado anterior, el resultado de Sullivan & Vigué-Poirrier si aporta algunos resultados nuevos. Por ejemplo, si M es conexa, $\pi_1(M)$ es finito y el anillo de cohomología racional de M requiere dos generadores, entonces lo mismo sucede para el anillo de $\tilde{M}$. Luego, en este caso el resultado anterior puede aplicarse liberándose de la hipótesis de 1-conexidad a conexidad para obtener una cantidad infinita de geodésicas en M proyectando las de $\tilde{M}$.

Así como el resultado anterior existen otros resultados, sin embargo, lo que nos falta es tiempo.

Por lo tanto:

¡GRACIAS!

:)

Bibliografía

- Yves Félix, John Oprea, and Daniel Tanré.
  Algebraic models in geometry, volume 17.
  Oxford: Oxford University Press, 2008.
- D. Gromoll and W. Meyer.
  Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds.
  J. Differ. Geom., 3:493–510, 1969.
- D. Sullivan.
  Differential forms and the topology of manifolds.
  1975.
- Dennis Sullivan.
  Infinitesimal computations in topology.
  Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci., 47:269–331, 1977.
- Micheline Vigue-Poirrier and Dennis Sullivan.
  The homology theory of the closed geodesic problem.
  J. Differ. Geom., 11:633–644, 1976.

¡El tiempo nos permitió un poco más! ...

Considere para un espacio simplemente conexo
$[\_,\_]_W : \pi_n(X) \otimes \pi_m(X) \to \pi_{n+m-1}(X)$ el producto de Whitehead.

Con este podemos definir una función

$$[\_,\_] : (\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}) \otimes (\pi_m(X) \otimes \mathbb{Q}) \to \pi_{n+m}(X) \otimes \mathbb{Q}$$

con regla de correspondencia:

$$[\alpha, \beta] = (-1)^{|\alpha|+1} \partial_* [\partial_*^{-1}\alpha, \partial_*^{-1}\beta]_W \otimes 1_{\mathbb{Q}},$$

donde $\partial_* : \pi_*(\Omega X) \to \pi_{*+1}(X)$ es el isomorfismo canónico que proviene de la adjunción $\Sigma \dashv \Omega$.

Puede demostrarse que esta última función satisface los axiomas de un álgebra de Lie graduada para $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{i \geq 2} \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$. A esta álgebra de Lie graduada se le conoce como el **álgebra homotópica racional de** X y es el álgebra que juega el papel de $A_{PL}(X)$ en la formulación de Quillen de la homotopía racional.