

Espacios de configuraciones de gráficas

Teresa Hoekstra Mendoza.
Cinvestav-IPN.

17 de diciembre, 2021

El espacio de configuraciones de una gráfica es el espacio topológico que pueden ocupar n partículas que se mueven sobre la gráfica sin chocar.

Ejemplo

Supongamos que tenemos tres gatos y tres platos de comida (tanto los gatos como los platos se encuentran sobre una gráfica) y queremos que los tres gatos coman sin chocar entre sí.



Ejemplo



Figura: ¡Los gatos se salieron del espacio de configuraciones!

Definición

Dada una gráfica G definimos su espacio de configuraciones en n puntos como $C^n G - \Delta$ donde $\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in \prod^n G : x_i = x_j, i \neq j\}$.

Ejemplo

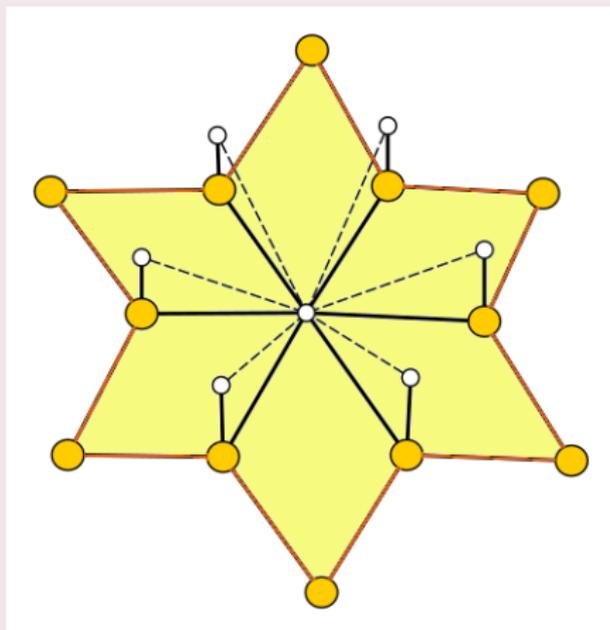


Figura: El espacio $C^2(K_{1,3})$

Definición

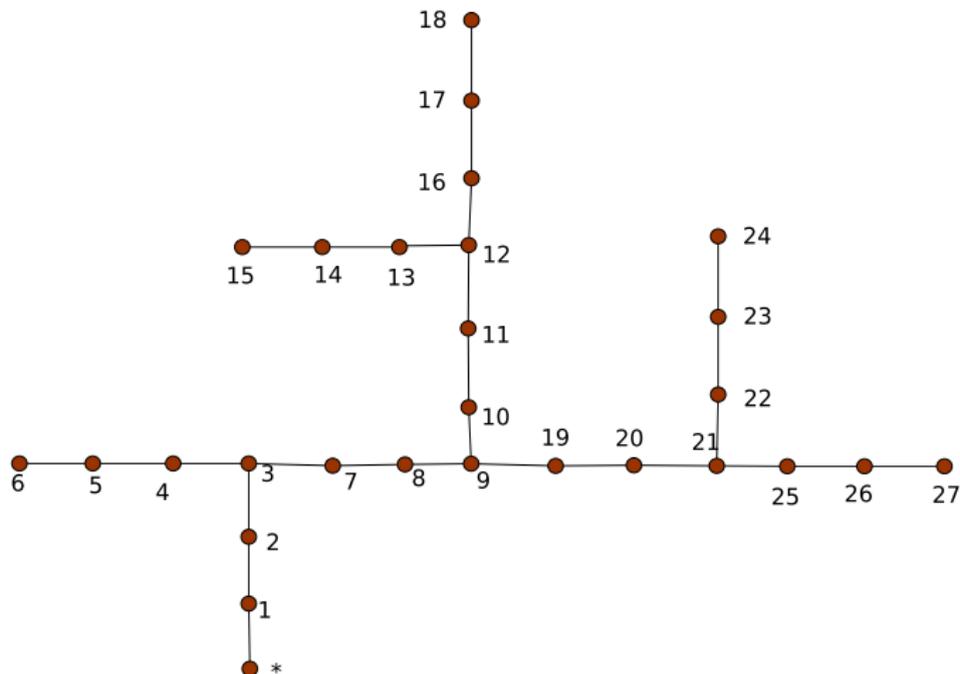
El espacio de configuraciones discretizado de G en n puntos, $\mathcal{D}^n G$, es el subcomplejo de $\prod^n G$ obtenido al remover todas las celdas (abiertas) cuya cerradura intersecta a Δ .

Teorema (Abrams)

Para toda $n > 1$ y cualquier gráfica G con al menos n vértices, el espacio de configuraciones etiquetado de G en n puntos se retrae fuertemente por deformación en $\mathcal{D}^n G$ si se cumplen las condiciones:

- 1 Todo camino entre vértices distintos de grado distinto a 2 pasa por al menos $n - 1$ aristas.
- 2 Todo ciclo pasa por al menos $n + 1$ aristas.

Nos vamos enfocar en el caso cuando G es un árbol y vamos a usar teoría de Morse discreta para clasificar a las celdas de $\mathcal{D}^n G$ en tres tipos de celdas. Para esto primero vamos a enumerar a los vértices del árbol (suficientemente subdividido) utilizando un encaje en el plano y fijando a una hoja como raíz.



Recordemos que una celda en $\mathcal{D}^n T$ es una tupla donde cada entrada es un vértice o una arista y la dimensión es la cantidad de aristas.

Definición

- 1 Decimos que una arista (a, b) respeta el orden en una celda c si c no contiene vértices v que sean adyacentes a a con $a < v < c$.
- 2 Sea $e(v)$ la arista que incide en el vértice v y está sobre la trayectoria hacia la raíz de T . Decimos que el vértice v está desbloqueado en c si $e(v) \cap c = \emptyset$.

Definición (Farley-Sabalka)

Una celda $a = (a_1, \dots, a_n)$ en $\mathcal{D}^n G$ es:

- 1 crítica si y solo si no contiene aristas que respeten el orden ni vértices desbloqueados.
- 2 colapsable si y solo si contiene una mínima arista que respeta el orden $a_i = e(v)$, y no contiene vértices desbloqueados menores que v .
- 3 redundante si y solo si se cumple alguna de las dos propiedades:
 - 1 no contiene aristas que respeten el orden pero sí contiene vértices desbloqueados
 - 2 contiene una mínima arista que respeta el orden $a_i = e(v)$ y un vértice desbloqueado a_j menor que v .

Ejemplo

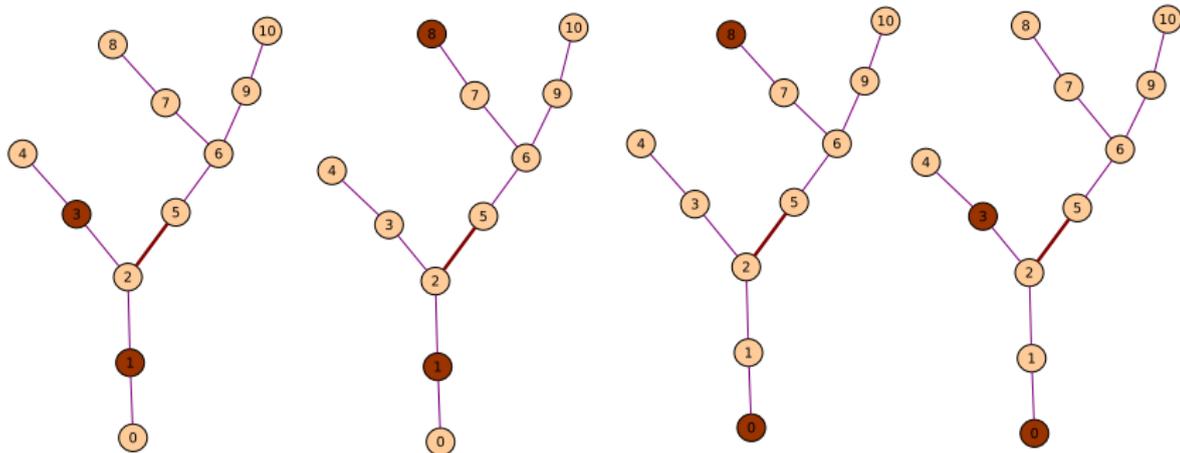


Figura: Ejemplo de celdas redundantes, colapsable y crítica.

Observación

La clasificación de celdas anterior forma un campo vectorial discreto gradiente.

Sea X'_n (respectivamente, X''_n) el subcomplejo de X obtenido al remover todas las n -celdas redundantes (y todas las n -celdas críticas) del n -esqueleto X_n de X .

Teorema

Sea X un complejo celular finito con un campo vectorial gradiente W .

- 1 Si X no tiene celdas críticas de dimensión mayor que k , entonces X se retrae fuertemente por deformación en X'_k .*
- 2 Para cualquier n , X'_n se obtiene a partir de X''_n pegando tantas n -celdas como n -celdas críticas hay en W . Más aún, si $n > 0$, entonces X''_n se retrae fuertemente por deformación en X'_{n-1} .*

Sea $G(n, T)$ la gráfica obtenida al colapsar todas las celdas W -colapsables en $(\mathcal{D}^n T)'_1$.

Observación

la composición $G(n, T) \simeq (\mathcal{D}^n T)'_1 \hookrightarrow \mathcal{D}^n T$ induce un epimorfismo a nivel de grupos fundamentales.

Vamos a identificar al conjunto de vértices $V(G(n, T))$ con el conjunto subyacente del grupo simétrico \mathcal{S}_n .

Explícitamente, una permutación $\sigma \in \mathcal{S}_n$ va a representar al vértice de $G(n, T)$ que corresponde a la 0-celda crítica (a_1, \dots, a_n) de $(\mathcal{D}^n T)'_1$, donde

$$\sigma(i) = a_i + 1 \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1)$$

Definición

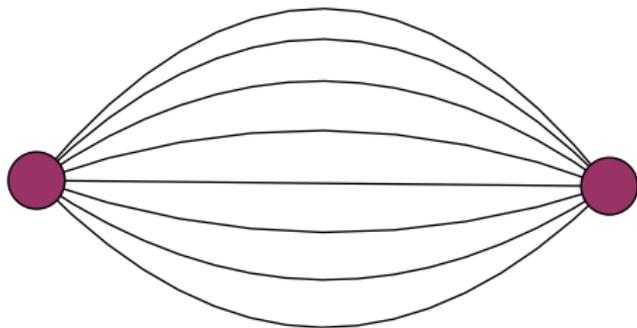
Para $r \geq 1$, sea

$$m_r = m_r(T) = \frac{1}{r!} \sum (d(v) - 1)(d(v) - 2) \cdots (d(v) - r) = \sum \binom{d(v) - 1}{r},$$

donde ambas sumas corren sobre los vértices v de T con $d(v) > r$.

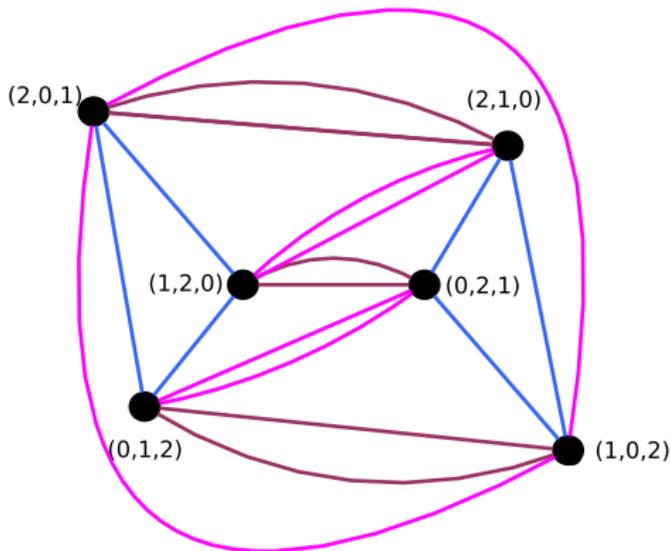
Teorema

Farber Si el árbol T está suficientemente subdividido entonces el espacio de configuraciones discretizado en dos puntos $\mathcal{D}^2 T$ de T tiene el tipo de homotopía \mathcal{S}_2 -equivariante de la gráfica banana B_{2m_2} donde $m_2 = \frac{1}{2} \sum (d(v) - 1)(d(v) - 2)$.



Teorema

Sea T un árbol suficientemente subdividido. Entonces el espacio de configuraciones $\mathcal{D}^3 T$ tiene el tipo de homotopía \mathcal{S}_3 -equivariante de la gráfica $G(3, T)$, donde cada arista rosa representa m_2 aristas y cada arista morada y azul representa $m_2 + m_3$ aristas.



Teorema (Aguilar, González, H.)

Si T es un árbol suficientemente subdividido, entonces el conjunto de aristas de $G(n, T)$ se descompone como la unión disjunta

$$E(G(n, T)) = \bigsqcup_{2 \leq j \leq i \leq n} E_{i,j}$$

donde, para cada i y j , $E_{i,j}$ consiste de

$$\sum_{l=2}^i \binom{i-2}{l-2} m_l$$

aristas repetidas de la forma $(\tau, \sigma_{i,j}^{-1} \cdot \tau)$ para cada permutación $\tau \in \mathcal{S}_n$.

Aquí $\sigma_{i,j} \in \mathcal{S}_n$ es el j -ciclo

$n - i + 1 \rightarrow n - i + 2 \rightarrow n - i + 3 \rightarrow \dots \rightarrow n - i + j \rightarrow n - i + 1$. En estos términos, la \mathcal{S}_n -acción en aristas es tal que una permutación $\mu \in \mathcal{S}_n$ manda cada arista (orientada) de la forma $(\tau, \sigma_{i,j}^{-1} \cdot \tau)$ homeomorficamente en una arista (orientada) de la forma $(\tau \cdot \mu, \sigma_{i,j}^{-1} \cdot \tau \cdot \mu)$. Una 1-celda crítica determina un elemento de $E_{i,j}$ si tiene una arista (a_0, a_1) , $n - i$ vértices menores que a_0 , y $j - 1$ vértices entre a_0 y a_1 .

Corolario

- (1) *Aristas repetidas en $G(n, T)$ solo ocurren como dicta el teorema anterior y por lo tanto pertenecen a un subnivel en común $E_{i,j}$.*
- (2) *Cada $E_{i,j}$ contiene $\sum_{\ell=2}^i \binom{i-2}{\ell-2} m_\ell$ aristas con los mismos extremos, para cada par distinto de extremos de aristas en $E_{i,j}$.*
- (3) *Si dos \mathcal{S}_n -orbitas en $G(n, T)$ distintas forman $\frac{n!}{j}$ j -ciclos disjuntos, entonces o pertenecen a distintos niveles E_i , o pertenecen al mismo subnivel $E_{i,j}$ (en cuyo caso son \mathcal{S}_n -orbitas de un par de aristas repetidas).*

Observación

La cantidad total de aristas en $G(n, T)$ es

$$n! \sum_{i=2}^n (i-1) \sum_{j=2}^i \binom{i-2}{j-2} m_j.$$

Ejemplo

La gráfica $G(4, T)$ se obtiene al pegar las siguientes tres figuras y en la tabla se resume su estructura combinatoria.

| condición en $\mathcal{D}^4 T$ | S_4 -órbita / $\sigma_{i,j}$ | aristas repetidas | (sub)nivel |
|-------------------------------------|--------------------------------|--------------------|------------|
| $a_2 = 0, a_3 = 1, a_0 < a_4 < a_1$ | 12 2-ciclos / (3, 4) | m_2 | $E_{2,2}$ |
| $a_2 = 0, a_0 < a_3 < a_1 < a_4$ | 12 2-ciclos / (2, 3) | $m_2 + m_3$ | $E_{3,2}$ |
| $a_2 = 0, a_0 < a_3 < a_4 < a_1$ | 8 3-ciclos / (2, 3, 4) | $m_2 + m_3$ | $E_{3,3}$ |
| $a_0 < a_2 < a_1 < a_3 < a_4$ | 12 2-ciclos / (1, 2) | $m_2 + 2m_3 + m_4$ | $E_{4,2}$ |
| $a_0 < a_2 < a_3 < a_1 < a_4$ | 8 3-ciclos / (1, 2, 3) | $m_2 + 2m_3 + m_4$ | $E_{4,3}$ |
| $a_0 < a_2 < a_3 < a_4 < a_1$ | 6 4-ciclos / (1, 2, 3, 4) | $m_2 + 2m_3 + m_4$ | $E_{4,4}$ |

En las siguientes figuras, toda arista verde va a representar m_2 aristas, toda arista morada y anaranjada va a representar $m_2 + m_3$ aristas y toda arista negra, azul y rosa va a representar $m_2 + 2m_3 + m_4$ aristas.

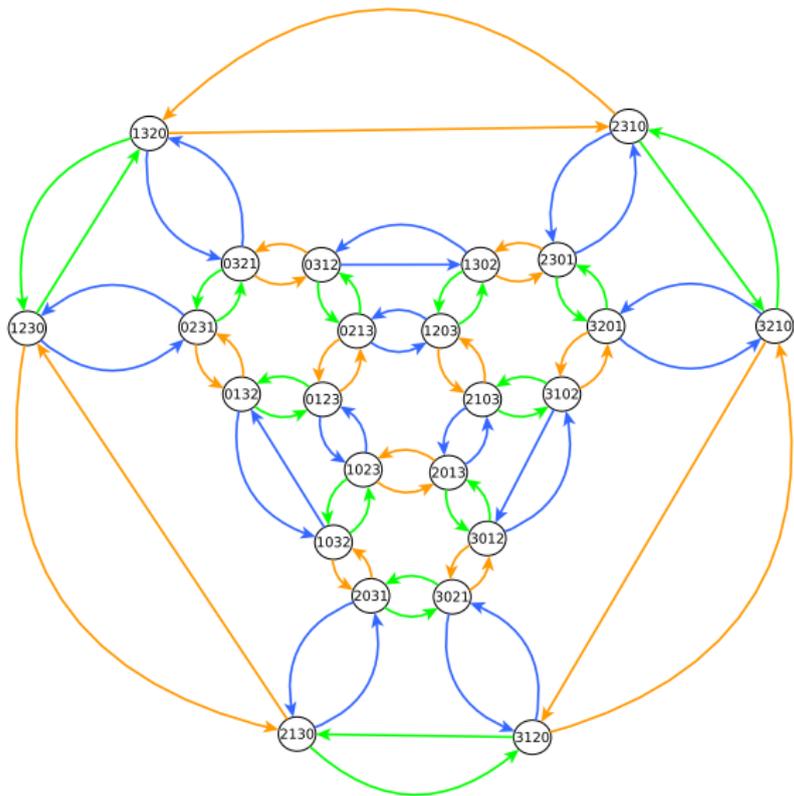


Figura: $E_{4,2}$ (flechas azules), $E_{4,3}$ (flechas anaranjadas) y $E_{2,2}$ (flechas verdes)

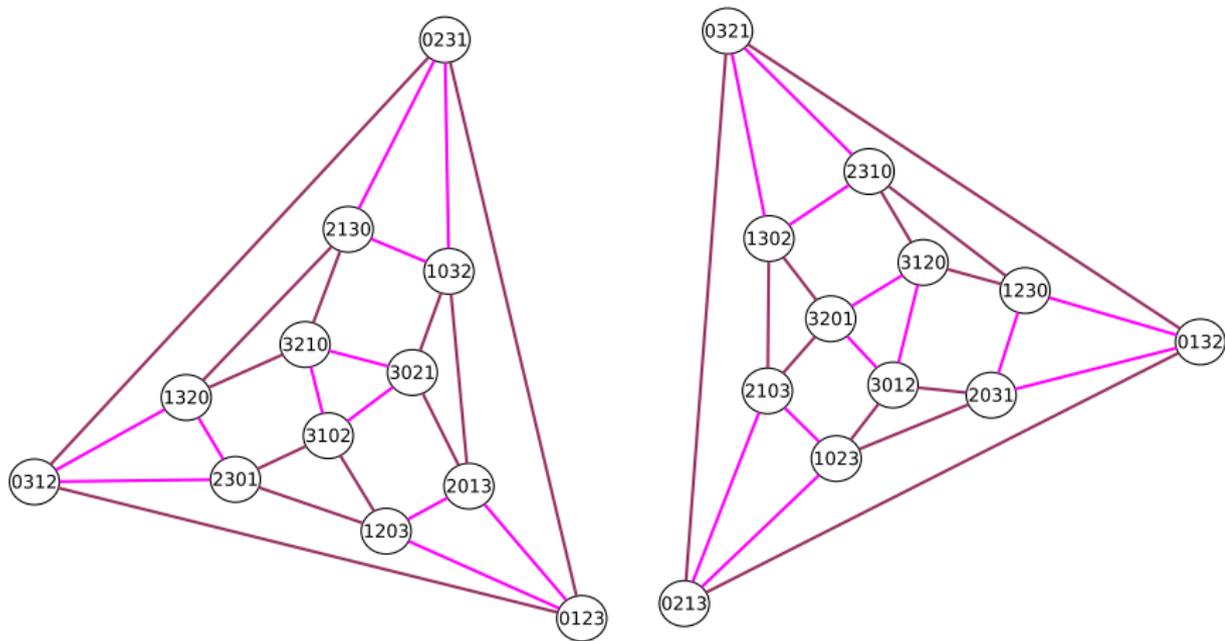


Figura: $E_{4,3}$ (flechas rosas) y $E_{3,3}$ (flechas moradas)

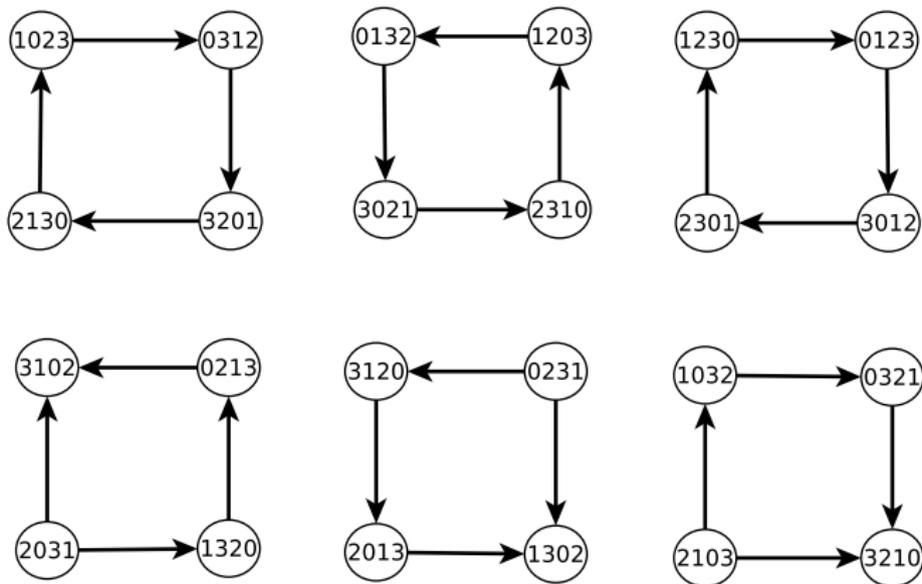


Figura: $E_{4,4}$ (flechas negras)

Definición

Definimos el espacio de configuraciones sin etiquetar G en n puntos, $UC^n G$, es el espacio cociente de $C^n G$ por la acción del grupo simétrico S_n , donde la acción permuta a los factores.

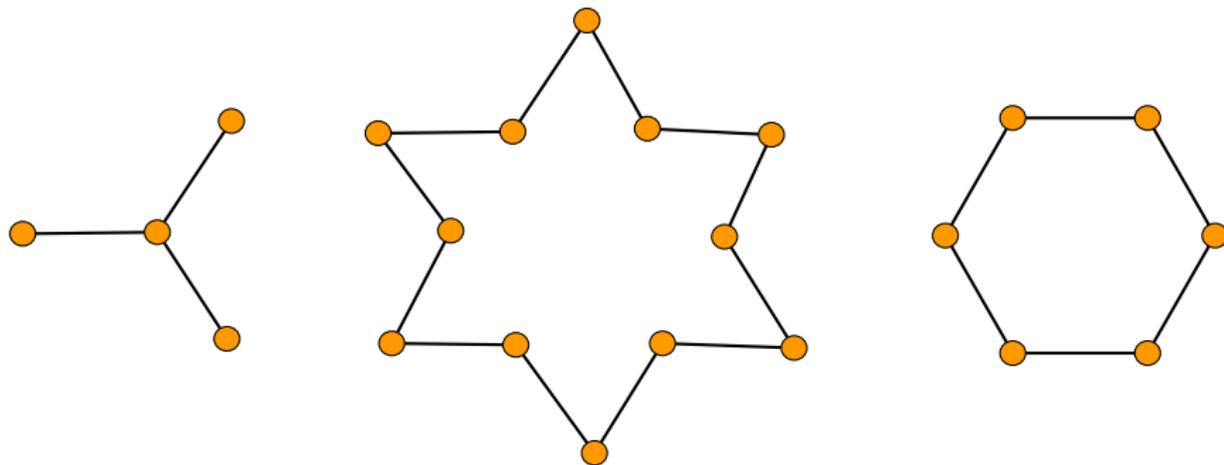


Figura: La gráfica $G = K_{1,3}$, el espacio $C^2 G$ y $UC^2 G$

Definición

El grupo simétrico S_n actúa en $\mathcal{D}^n G$ permutando los factores. La acción permuta celdas, y el complejo cociente, denotado por $U\mathcal{D}^n G$, es el espacio de configuraciones desordenadas discretizado de G en n puntos

Teorema (Abrams)

Para toda $n > 1$ y cualquier gráfica G con al menos n vértices, el espacio de configuraciones sin etiquetar de G en n puntos se retrae fuertemente por deformación en $U\mathcal{D}^n G$ si se cumplen las condiciones:

- 1 Todo camino entre vértices distintos de grado distinto a 2 pasa por al menos $n - 1$ aristas.
- 2 Todo ciclo pasa por al menos $n + 1$ aristas.

Conjetura (Sabalka)

El anillo de de cohomología de $UD^n T$ es un anillo exterior de caras si y solo si $n = 4, 5$ o T es un árbol lineal.

Conjetura (Farley-Sabalka)

El anillo de de cohomología de $UD^n T$ es un anillo exterior de caras para todo árbol T y toda $n \geq 4$.

Definición

Dado un árbol T decimos que es un árbol binario peludo si al remover todas las hojas obtenemos un árbol binario.

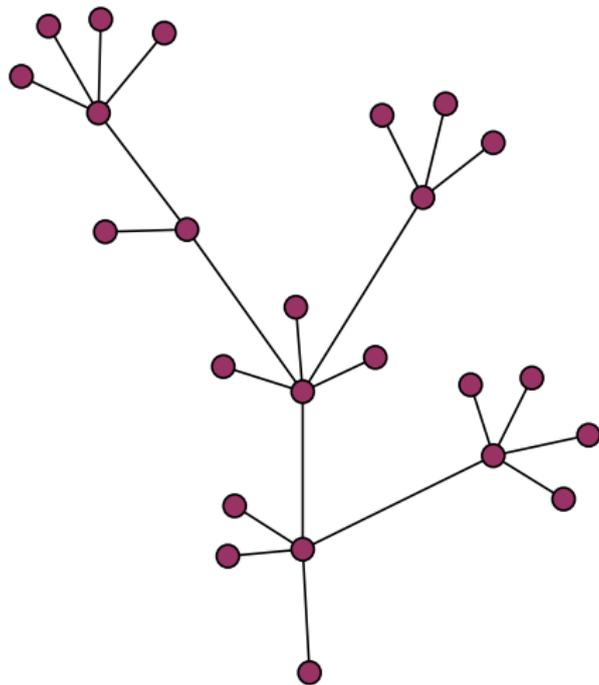


Figura: Un árbol binario peludo

Teorema (González, H.)

Sea T un árbol binario peludo. Entonces el anillo de cohomología de $UD^n T$ es un anillo exterior de caras para toda $n \geq 4$.

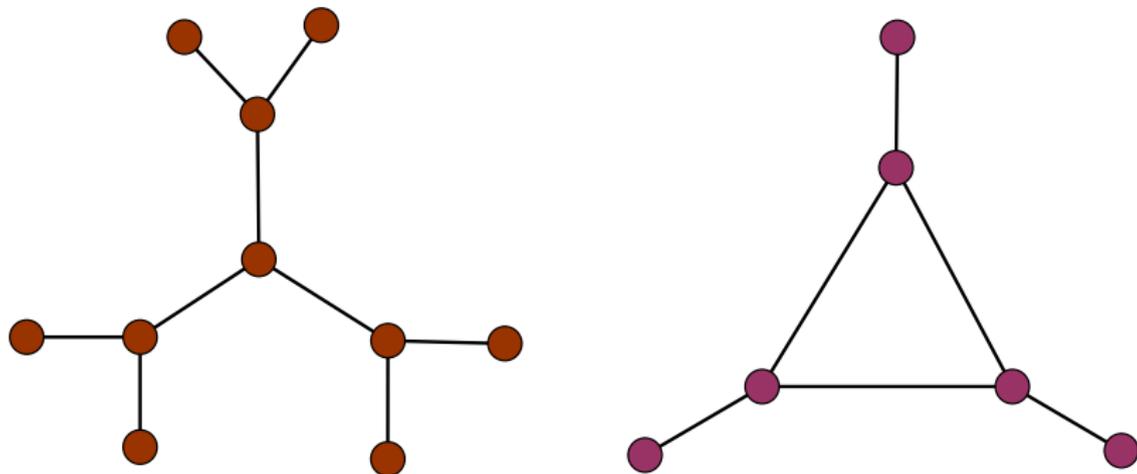


Figura: El árbol binario T y el complejo simplicial asociado a $UD^4 T$.

iiiGRACIAS!!!

idskjen@math.cinvestav.mx