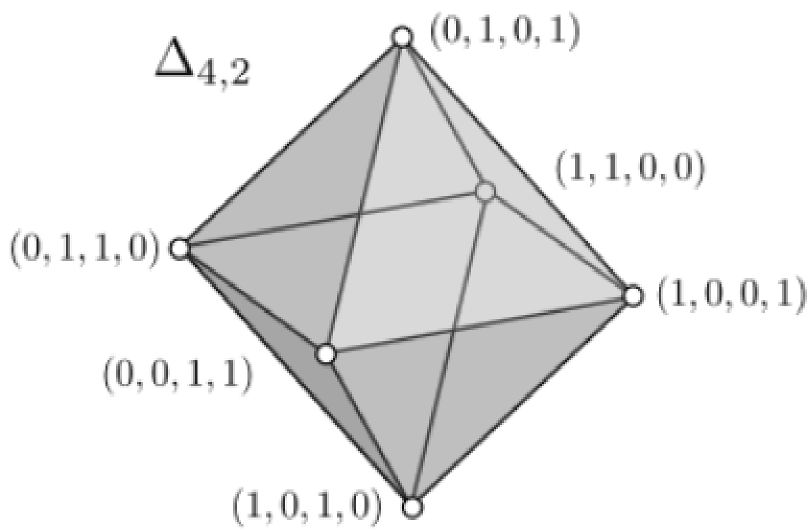
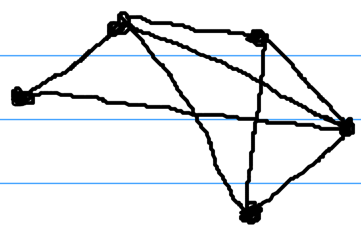
El teorema hipersimplicial de Van-Kampen Flores

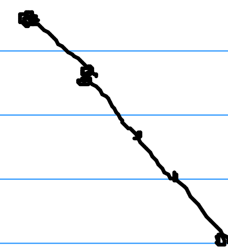


Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
https://www.nekomath.com

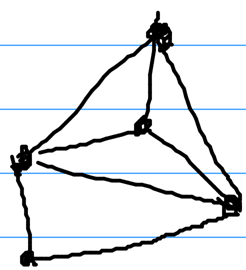
Gráficas planas

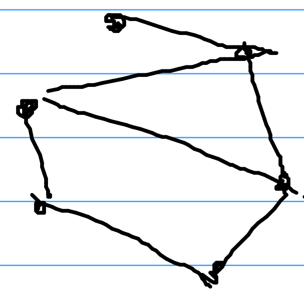
Definición. Una gráfica consiste de un conjunto de vértices V y un conjunto de parejas de vértices E, llamadas aristas.





Definición. Una gráfica es plana si "se puede dibujar en el plano" de modo que para cada par de aristas, sus dibujos no se intersecten en "su interior".





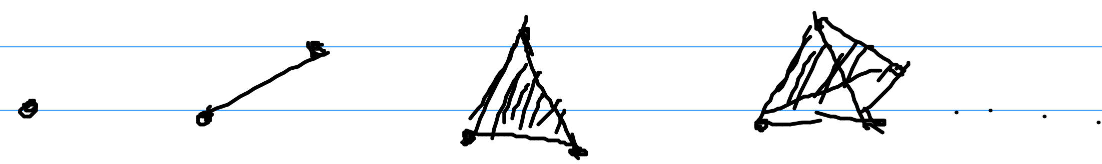
Teorema: La gráfica completa en 5 vértices no es plana

Hipergráficas, simplejos y esqueletos

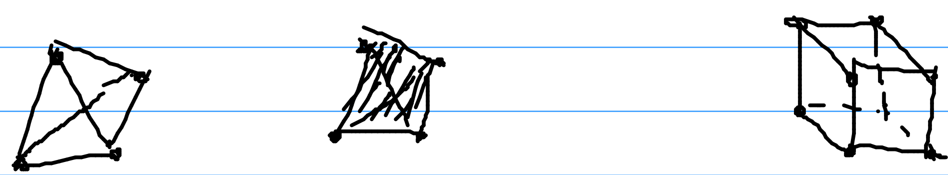
Definición. Una hipergráfica r-regular consiste de un conjunto de vértices V y una colección de subconjuntos de V de tamaño r, llamadas hiperaristas.

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad$ $E = \{125, 246, 123, 456\}$

Definición. Un simplejo d-dimensional es la envolvente convexa de un conjunto de d+1 puntos afinmente independientes en $\mathbb{R}$.



Definición. Para un politopo (o complejo simplicial) y un entero i, el i-esqueleto es el espacio topológico formado por sus caras de dimensión i.



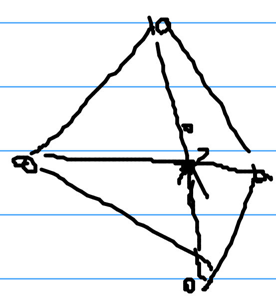
El teorema de Van Kampen - Flores

Teorema: No existen funciones continuas e inyectivas del (d-1)-esqueleto del simplejo 2d-dimensional a $\mathbb{R}^{2(d-1)}$. De hecho, se pueden encontrar simplejos disjuntos en dicho esqueleto cuya imagen se intersecta.

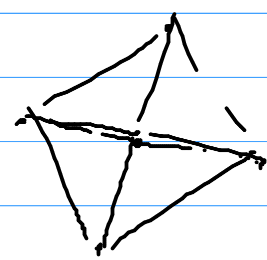
- 1-esqueleto
- 4-dimensional (5 vértices)
- $\mathbb{R}^2$

K_5 no es plana

5 vértices



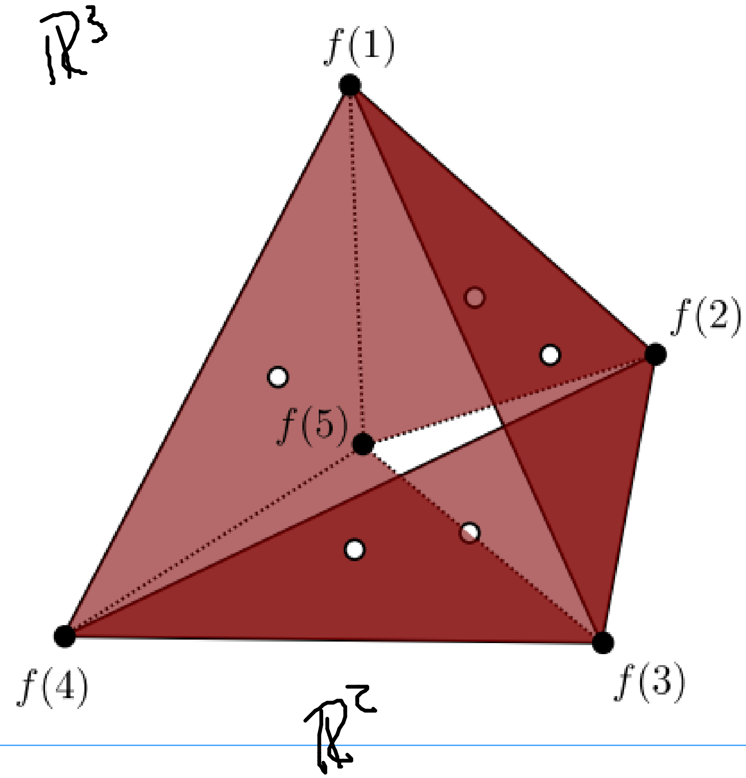
5 vértices

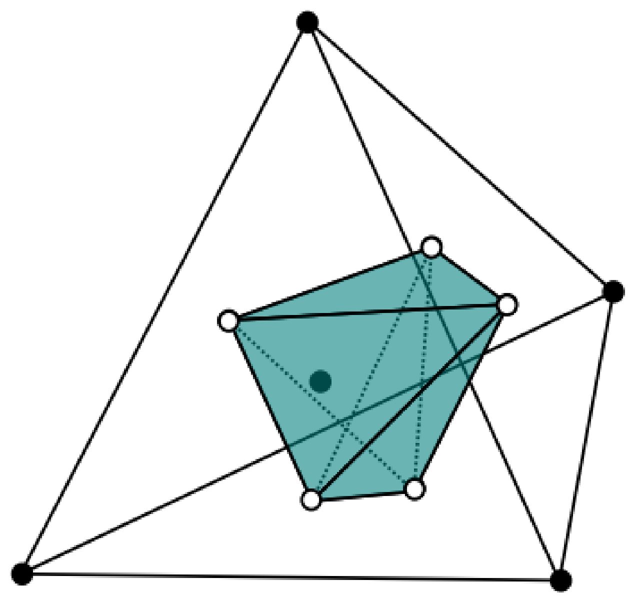


Dimensión convexa de hipergráficas

Definición. La dimensión convexa de una hipergráfica r-regular es la menor dimensión en la cual se puede poner un punto por cada uno de los vértices de tal manera que los r-baricentros de las hiperaristas sean un conjunto de puntos en posición convexa.

$V=\{1,2,3,4,5\}$ $E=\{125, 234, 345, 145, 123\}$

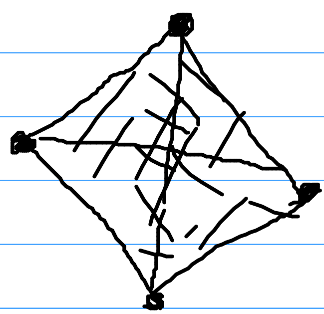




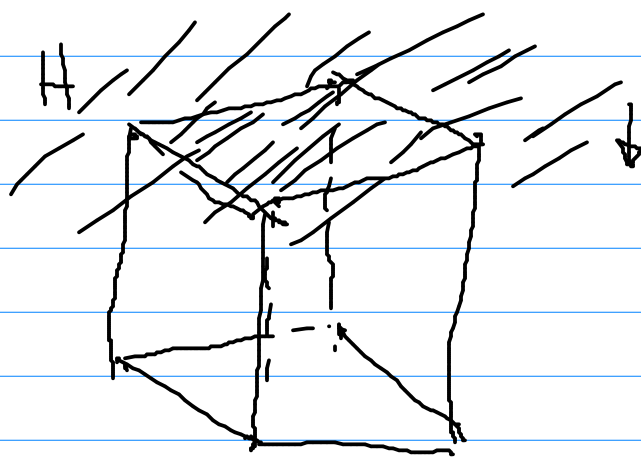
Politopos

Definición. Un politopo es o bien la envolvente convexa de un conjunto de puntos en el espacio d-dimensional (descripción V), o bien una intersección compacta de semiespacios en el espacio d-dimensional (descripción H).

$\mathbb{R}^3$ V

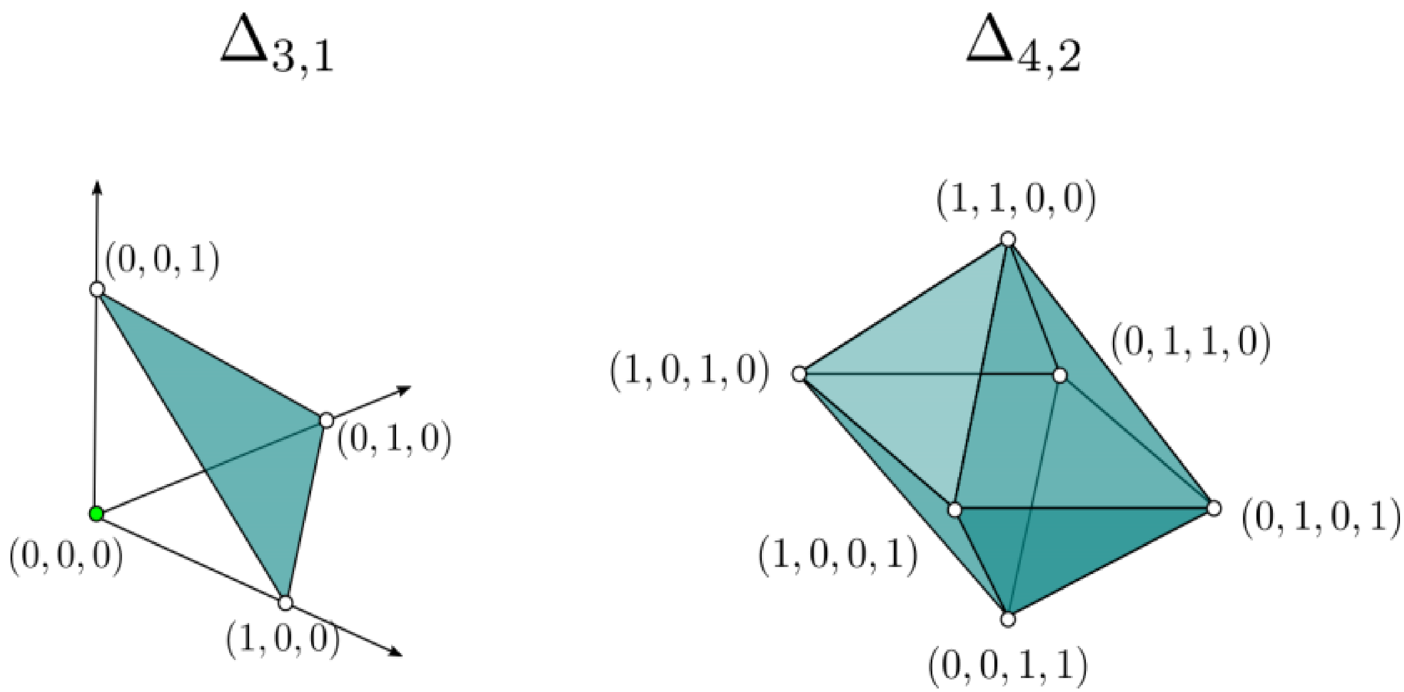


$\mathbb{R}$ H

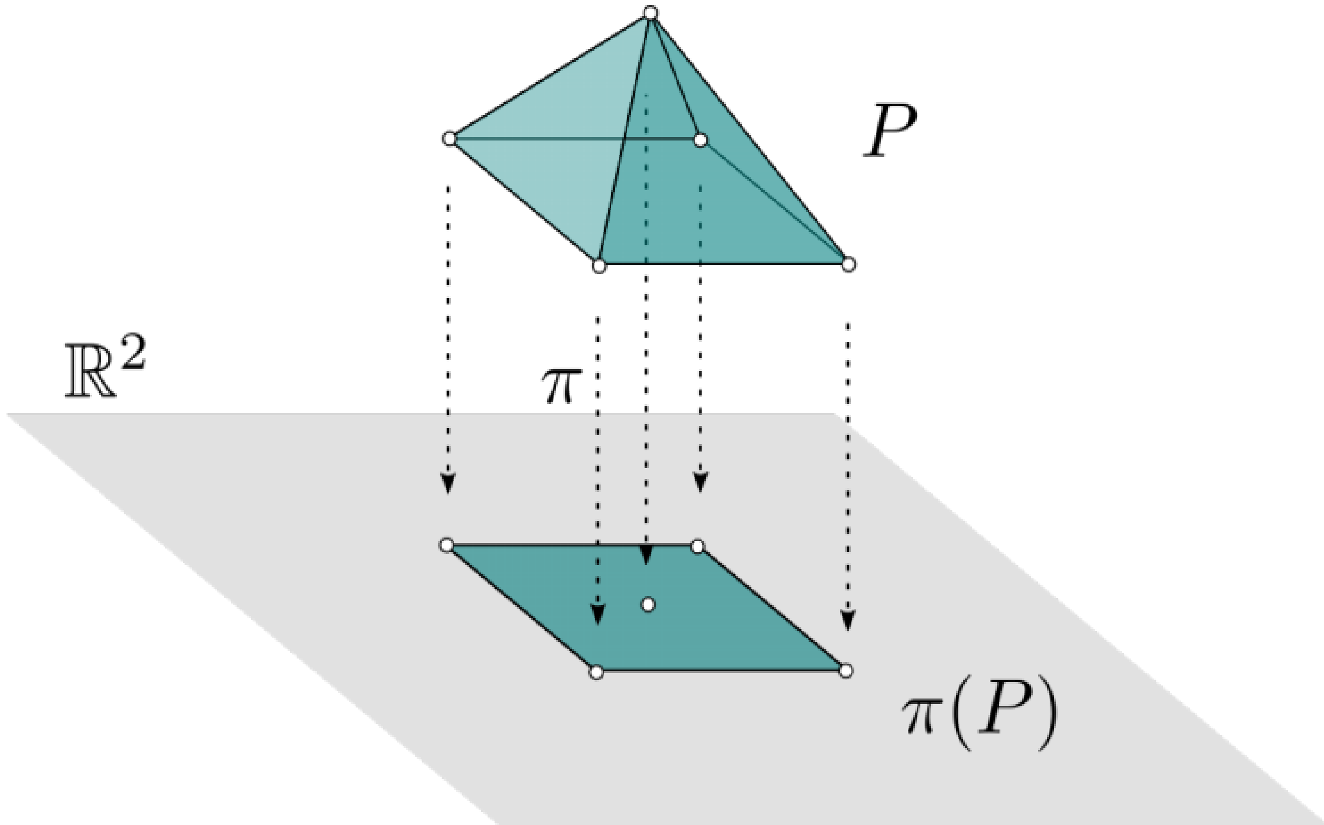


Hipersimplejos

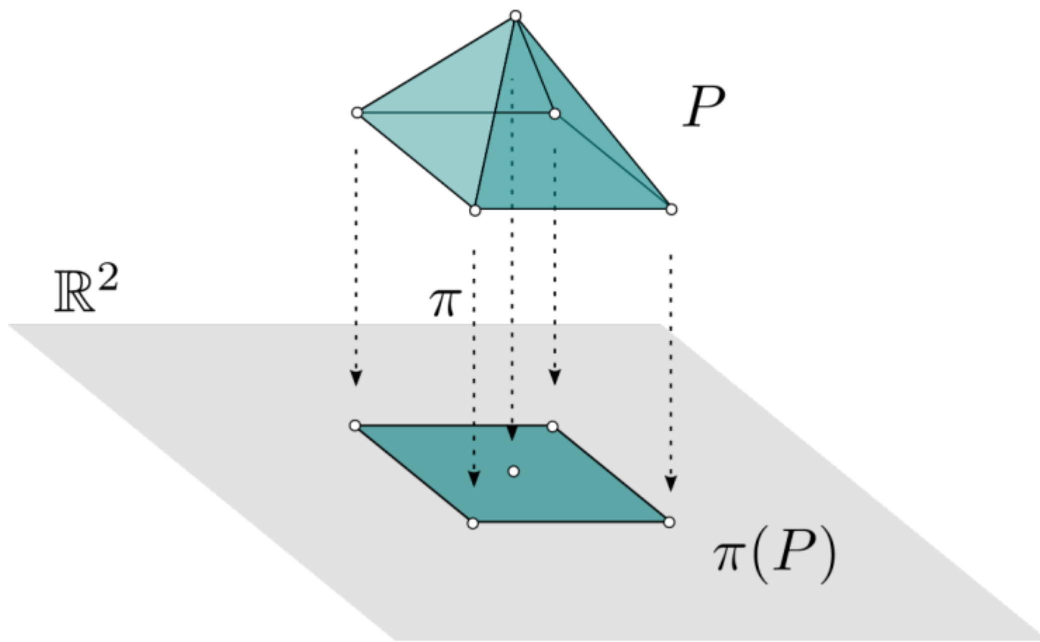
Definición. Para n y k, el (n,k)-hipersimplejo es el politopo en $\mathbb{R}^n$ cuyos vértices son los vectores {0,1} con suma exactamente k.



Proyecciones de politopos



Proyecciones que preservan esqueletos



Resultado principal

Theorem

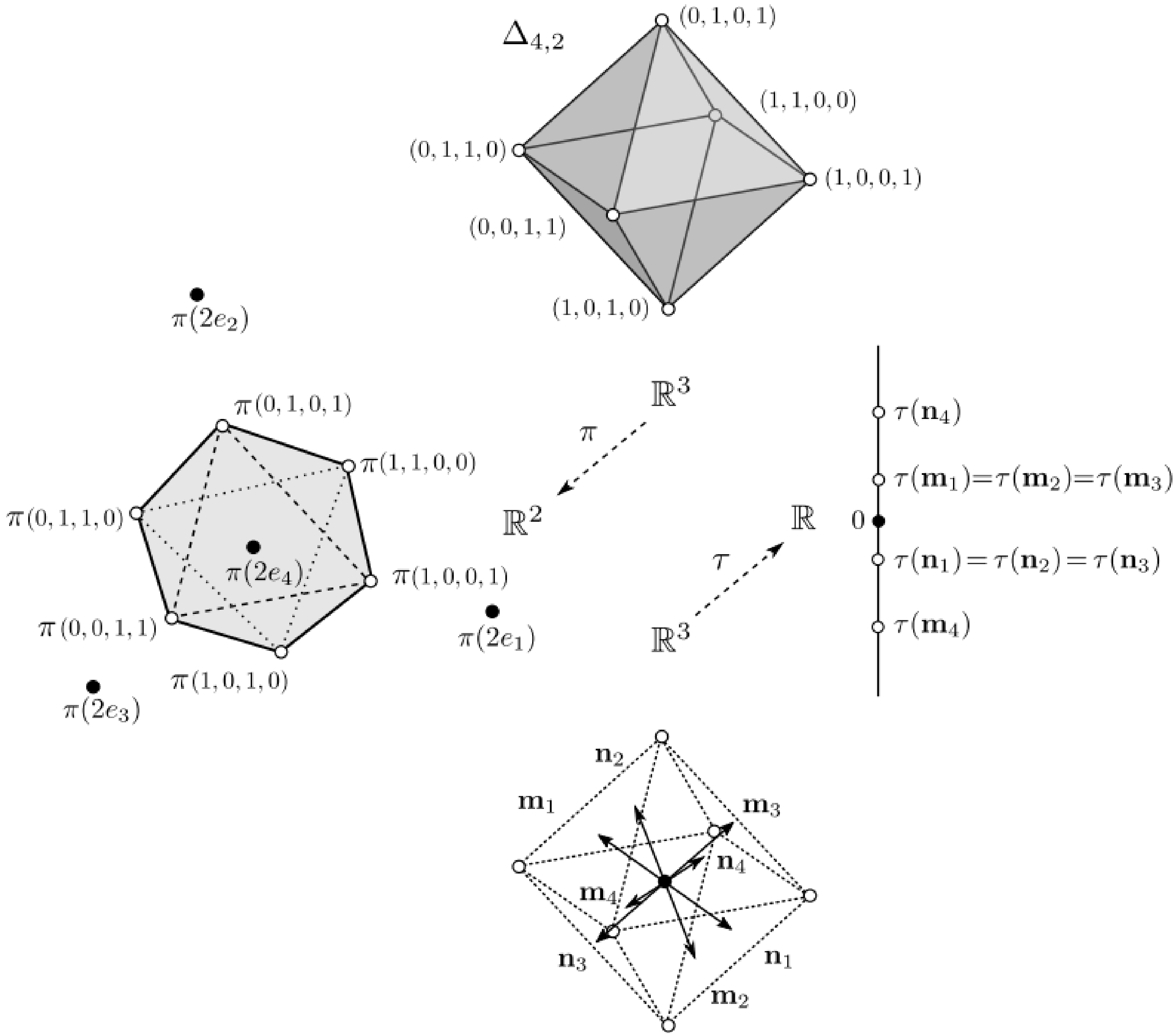
Given positive integers n, k, i such that $1 \leq k \leq n-1$ *and* $0 \leq i \leq n-1$, *the value of* $d(n,k,i)$ *is determined as follows. Then*

$$d(n,k,i) = \begin{cases} 2k+2i & \text{if } n \geq 2k+2i+2, \\ 2n-2k+2i & \text{if } n \leq 2k-2i-2, \\ n-1 & \text{if } n \in B_{k,i},\ k \in A_{n,i} \\ n-2 & \text{if } n \in B_{k,i},\ k \notin A_{n,i} \end{cases}$$

Where

$$A_{n,i} = \{1,2,\ldots,i+1\} \cup \{n-i-1, n-i, \ldots, n-1\}.$$
$$B_{k,i} = \{2k-2i-1, \ldots, 2k+2i+1\}.$$

Lema de Ziegler



VK-F hipersimplicial

Teorema. En particular, no existen proyecciones que preserven el (d-1)-esqueleto de cualquier (2d+1,k)-hipersimplejo (2d-dimensional) a $\mathbb{R}^{2d-1}$.
Más aún, conocemos cómo son todas las proyecciones a $\mathbb{R}^{2d}$ que sí lo preservan.

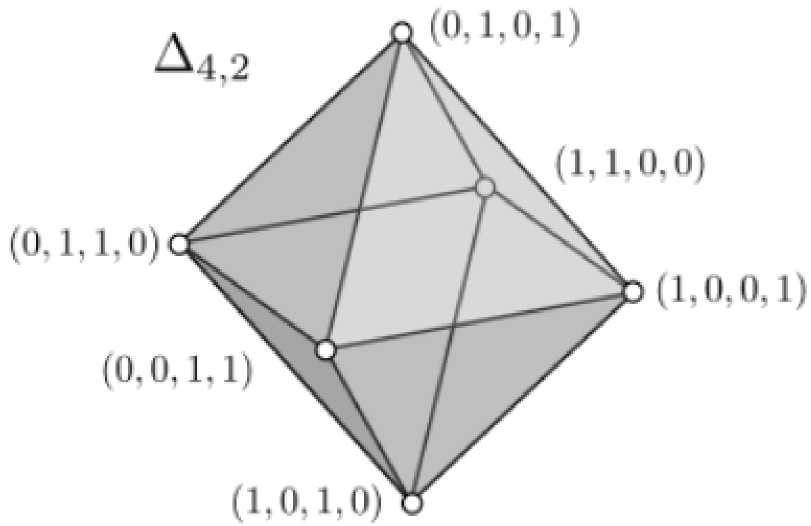
Teorema: No existen funciones continuas e inyectivas del (d-1)-esqueleto del simplejo 2d-dimensional a $\mathbb{R}^{2(d-1)}$. De hecho, se pueden encontrar simplejos disjuntos en dicho esqueleto cuya imagen se intersecta.

Parte de la discusión

Problema. Demuestra que el (n,k)-simplejo tiene dimensión $n-1$.

Problema. Muestra que la dimensión convexa de cualquier gráfica es a lo mucho 4.

Problema. Da una H-descripción del $(4,2)$-simplejo.



https://www.nekomath.com