El mundo de las cotas inferiores de curvatura

Raquel Perales

Séptimas Jornadas de Geometría, Topología y Dinámica.
16 y 17 de diciembre de 2021

Una variedad Riemanniana (M^n, g) consiste de una variedad M y una métrica g, i.e. para todo $x \in M$, $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ es un producto interior.

A partir de g podemos definir una conexión

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

que satisface $Xg(V, W) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)$.

Luego podemos definir al tensor de curvatura riemanniana:

$$\mathrm{R}_x : \mathrm{T}_x\mathrm{M} \times \mathrm{T}_x\mathrm{M} \times \mathrm{T}_x\mathrm{M} \to \mathrm{T}_x\mathrm{M},$$

donde $\mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Z} := \nabla_\mathrm{X}\nabla_\mathrm{Y}\mathrm{Z} - \nabla_\mathrm{Y}\nabla_\mathrm{X}\mathrm{Z} - \nabla_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]}\mathrm{Z}$.

En una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ de T_xM, las curvaturas seccional, de Ricci y escalar se escriben como:

- $\mathrm{sec_x}(\mathrm{e_i}, \mathrm{e_j}) = g_x(\mathrm{R_x}(\mathrm{e_i}, \mathrm{e_j})\mathrm{e_j}, \mathrm{e_i})$
- $\mathrm{Ricci_x}(\mathrm{e_i}, \mathrm{e_j}) = \sum_{k=1}^n g_x(\mathrm{R_x}(\mathrm{e_i}, \mathrm{e_k})\mathrm{e_k}, \mathrm{e_j})$
- $\mathrm{scal}(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n g_x(\mathrm{R_x}(\mathrm{e_i}, \mathrm{e_k})\mathrm{e_k}, \mathrm{e_i})$

Para cada $k \in \mathbb{R}$ definimos un espacio (variedad riemanniana) modelo mediante,

$$\mathrm{S_k^n} = \begin{cases} (\mathbb{S}^n(\pi/\sqrt{k}), g_r) & \text{si } k > 0, \\ (\mathbb{R}^n, g_e) & \text{si } k = 0, \\ (\mathbb{H}^n(k), g_h) & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Tal que $\mathrm{S_k^n}$ satisface $\sec = k$ en todo punto y para cualesquiera $e_i \neq e_j$.

Dada una variedad riemanniana (M, g),

- ⋆ ¿qué nos puede decir g acerca de M?
- ⋆ En particular, ¿qué nos puede decir cuando $\sec_g$, Ricci_g o scal_g están acotadas? Por ejemplo, si $k \leq \sec_g \leq K$ y S^n_k o S^n_K satisfacen propiedades P_k y Q_K, resp, ¿será que (M, g) satisface P_k y Q_K o algo similar?

Esta pregunta fue respondida usando entre otras cosas:

- Estudio de geodésicas, flujo geodésico
- Synge (1926): Sea $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ una variación suave de una geodésica $\gamma(t) = \bar{\gamma}(0, t)$. Entonces,

$$\frac{d^2 E(\gamma_s)}{ds^2}\Big|_{s=0} = \int_a^b \left|\frac{\partial^2 \bar{\gamma}}{\partial t \partial s}\right|^2 dt - \int_a^b g\left(R\left(\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}\right)\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}\right)dt + g\left(\frac{\partial^2 \bar{\gamma}}{\partial s^2}, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}\right)\Big|_a^b,$$

  donde $E(c) = \int g(c'(t), c'(t))dt$ para toda curva c de M.
- Bochner (1950s): Sea $u : M \to \mathbb{R}$ una función suave. Entonces

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2\right) = g(\nabla \Delta u, \nabla u) + |\nabla^2 u|^2 + \mathrm{Ricci}(\nabla u, \nabla u)$$

geometría de comparación acotando a la curvatura seccional

Sea (M^n, g) una variedad riemanniana completa y $k \in \mathbb{R}$:

- ⋆ Si M es simplemente conexa y $\sec_g = k$, entonces (M, g) es isométrica a $\mathrm{S}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$
- ⋆ Cartan-Hadamard: Si $\sec_g \leq 0$, entonces $\widetilde{M}$ es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ y $\pi_i(M) = 0$ para todo $i > 1$.
- ⋆ Myers-Bonnet (1951): Si $sec_g \geq k > 0$, entonces $\mathrm{diam}(M) \leq \mathrm{diam}(\mathrm{S}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}})$, M es compacta y $\pi_1(M)$ es finito.

geometría de comparación acotando a la curvatura de Ricci (el caso suave de parte de lo que vamos a generalizar)

Teoremas:

- *Bochner (1946): Sea* (M^n, g) *una variedad riemanniana compacta y sin frontera, orientable, con* $\mathrm{Ricci_g} \geq 0$*, entonces* $b_1(M) \leq n$ *con igualdad ssi* (M, g) *es un toro plano*

- *Gromov (1981), Gallot (1983): Para todo* $n \geq 3$*, existe* $\varepsilon(n) > 0$ *tal que toda variedad cpct sin frontera* (M^n, g) *con*

$$\mathrm{diam}(M)^2 \mathrm{Ricci_g} \geq -\varepsilon(\mathrm{n})$$

satisface $b_1(M) \leq n$

Teoremas:

- *Colding (1997): Para todo $n \geq 3$, existe $\varepsilon(n) > 0$ tal que toda variedad cpct sin frontera (M^n, g) con*

$$\mathrm{diam}^2(M)\mathrm{Ricci}_{\mathrm{M}} \geq -\varepsilon(\mathrm{n}) \quad y \quad \mathrm{b}_1(\mathrm{M}) = \mathrm{n}.$$

  Entonces M es homeomorfa a un toro si $n \neq 3$ y homotopicamente equivalente a un toro si $n = 3$

- *Cheeger-Colding (2000): Utilizando otros métodos se puede demostrar bajo las hipótesis de teorema anterior que M es bi-Hölder a un toro plano.*

un poco de contexto antes de pasar al caso no suave. En el caso suave tenemos:

- M^n variedad riemanniana compacta y sin frontera
- $\widetilde{M}$ cubriente universal de M
- $\pi_1(M)$ primer grupo fundamental de M

Sea $H := [\pi_1(M), \pi_1(M)]$ el conmutador de $\pi_1(M)$

- $\overline{M} = \widetilde{M}/H$ espacio cubriente de M
- $\Gamma = \pi_1(M)/H \cong H_1(M, \mathbb{Z}) \qquad \mathrm{b}_1(M) = \mathrm{rank}(\Gamma)$
- $\Gamma' \leq \Gamma \quad \& \quad \Gamma' \cong \mathbb{Z}^{\mathrm{b}_1(M)}$
- $M' = \overline{M}/\Gamma'$

El caso no suave: Espacios RCD(K, N)

Lott, Villani, Sturm, Bacher, Ambrosio, Gigli, Savaré, Rajala, Mondino, de Philippis, Honda, Ketterer, Kuwada, Erbar, . . . , Rigoni, Brué, Semola, Pasqualetto, etc...

Definition

Sea $(X, \mathrm{d}, \mathfrak{m})$ un espacio métrico medible y $K \in \mathbb{R}$. Decimos que $(X, \mathrm{d}, \mathfrak{m})$ es un espacio $RCD(K, N)$ space si se satisfacen:

- Existe $C > 0$ y $\bar{x} \in X$ tal que $\mathfrak{m}(B_r(\bar{x})) \leq \exp(Cr^2)$ para todo $r > 0$
- Si $f \in W^{1,2}(X, \mathrm{d}, \mathfrak{m})$ satisface $|Df| \in L^\infty(\mathfrak{m})$, entonces existe $\tilde{f} \in \mathrm{LIP}(X)$ tal que $\tilde{f} = f$ $\mathfrak{m}$-a.e. y $\mathrm{Lip}(\tilde{f}) = \| |Df| \|_{L^\infty(\mathfrak{m})}$
- $W^{1,2}(X, \mathrm{d}, \mathfrak{m})$ es un espacio de Hilbert
- Para toda $f \in D(\Delta)$ con $\Delta f \in W^{1,2}(X)$ y $g \in D(\Delta) \cap L^\infty(\mathfrak{m})$ con $\Delta g \in L^\infty(\mathfrak{m})$, la siguiente desigualdad débil de Bochner se satisface,

$$\int \Delta g \frac{|\nabla f|^2}{2} \mathrm{d}\mathfrak{m} \geq \int g[\tfrac{1}{N}|\Delta f|^2 + \nabla f \cdot \nabla \Delta f + K|\nabla f|^2] \mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

¿Por qué esta clase de espacios es buena?

La clase $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ es una extensión natural al caso no suave de la noción de variedad Riemanniana con dimensión $\leq N$ y curvatura de Ricci acotada por abajo por $K \in \mathbb{R}$. De hecho:

- It contains the class of smooth Riemannian manifolds of dimension $\leq N$ and Ricci curvature bounded below by $K \in \mathbb{R}$;
- It is closed under pointed measured Gromov-Hausdorff convergence, so Ricci limit spaces are examples of $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ spaces;
- It includes the class of $\lfloor N \rfloor$-dimensional Alexandrov spaces with curvature bounded below by $K/(\lfloor N \rfloor - 1)$, the latter being the synthetic extension of the class of smooth $\lfloor N \rfloor$-dimensional Riemannian manifolds with sectional curvature bounded below by $K/(\lfloor N \rfloor - 1)$;
- In contrast to the class of smooth Riemannian manifolds, it is closed under natural geometric operations such as quotients, foliations, conical and warped product constructions (provided natural assumptions are met);
- It contains weighted Riemannian manifolds with Bakry-Émery Ricci lower bounds, i.e. $\mathrm{Ricci}_g - (N-n)\frac{\nabla^2 \Psi^{1/N-n}}{\Psi^{1/N-n}} \geq Kg$
- Several fundamental comparison and structural results known for smooth Riemannian manifolds with Ricci curvature bounded below and for Ricci limits have been extended to $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ spaces, e.g. Bishop-Gromov volume comparison, Laplacian comparison, Cheeger-Gromoll splitting, inequalities on heat flow, etc
- Any $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ space $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ admits a universal cover $(\widetilde{X}, \mathsf{d}_{\widetilde{X}}, \mathfrak{m}_{\widetilde{X}})$, which is an $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ space as well. The group of deck transformations on the universal cover is called *revised fundamental group of X* and denoted by $\bar{\pi}_1(X)$

Definiendo 'cubrientes universales y grupos fundamentales' para espacios métricos

- If X is connected, a universal cover space for X is a connected covering $p_{Y,X}$ that satisfies a universal commutative triangle in the class of connected coverings of X

- The group of deck transforms of a covering $p_{Y,X} : Y \to X$ is: $G(Y\,|\,X) := \left\{ h : Y \to Y\,|\,h \text{ is an homeo and } p_{Y,X} \circ h = p_{Y,X} \right\}$

- Given a complete length metric space (X, d_X) that admits a universal cover $(\widetilde{X}, \mathrm{d}_{\widetilde{X}})$, the revised first fundamental group is $\bar{\pi}_1(X) := G(\widetilde{X}\,|\,X)$

- If Y is connected and locally path-connected, for any $y_0 \in Y$ we have:
    - $G(Y\,|\,X) \cong \pi_1(X, p_{Y,X}(y_0)) \Big/ p_{Y,X\sharp}(\pi_1(Y, y_0))$
    - $p_{Y,X}^{-1}(p_{Y,X}(y_0)) \longleftrightarrow G(Y\,|\,X)$
    - $X \cong Y/G(Y\,|\,X)$

Teoremas:

Let $K \in \mathbb{R}$, $N \in [1, \infty)$ *and* $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ *be an* $\mathrm{RCD}^*(K, N)$ *space.*

- *Mondino-Wei:* $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ *has a universal cover space which is itself an* $\mathrm{RCD}^*(K, N)$ *space*

- *Mondello-Mondino-P: If* X *is compact, then* $\bar{\pi}_1(X)$ *is finitely generated*

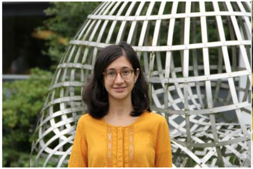
$$\mathrm{b}_1(X) := \mathit{rank}\,(\bar{\pi}_1(X)/[\bar{\pi}_1(X), \bar{\pi}_1(X)])$$

- *Mondello-Mondino-P: If* X *is compact, then for any normal subgroup* H *of* $\bar{\pi}_1(X)$,

$$(\bar{X}, \mathsf{d}_{\bar{X}}, \mathfrak{m}_{\bar{X}}) = (\widetilde{X}/H, \mathsf{d}_{\widetilde{X}/H}, \mathfrak{m}_{\widetilde{X}/H}) \text{ is an } \mathrm{RCD}^*(K, N)$$

which is covered by $\widetilde{X}$ *and covers* X *(c.f. Galaz-García, Kell, Mondino, Sosa)*

Now we are ready to state the generalizations of Gromov and Gallot's result and, Cheeger and Colding's result



Teoremas: (Mondello-Mondino-P, 2021)

◇ *Para todo* $N \in [1,\infty)$ *existe* $\varepsilon(N) > 0$ *tal que cualquier espacio* $\mathrm{RCD}^*(K,N)$, $(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$, *cpcto con* $\mathrm{diam}^2(X)K \geq -\varepsilon(N)$ *satisface* $\mathrm{b}_1(X) \leq \lfloor N \rfloor$.

◇ *Para todo* $N \in [1,\infty)$ *existe* $\delta(N) > 0$ *con la siguiente propiedad:*
Cualquier espacio $\mathrm{RCD}^*(K,N)$, $(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$, *con* $\mathrm{diam}^2(X)K > -\delta(N)$ *and* $\mathrm{b}_1(X) = \lfloor N \rfloor$ *satisface,*

- $(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$ *tiene dimension esencial igual a* $\lfloor N \rfloor$ *y es* $\lfloor N \rfloor$*-rectificable como espacio métrico de medida*
- *Existe una cubierta finita* $(X',\mathsf{d}_{X'},\mathfrak{m}_{X'})$ *de* $(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$ *que es* $\varepsilon(\delta|N)$*-mGH cercana a un toro plano de dimensión* $\lfloor N \rfloor$
- *Si además* $N \in \mathbb{N}$, *entonces* $\mathfrak{m} = c\mathcal{H}^N$ *para alguna constante* $c > 0$ *y* (X,d) *es bi-Hölder a un toro plano N-dimensional.*

c.f. Gigli-Rigoni's Recognizing the flat torus among $\mathrm{RCD}^*(0,N)$ spaces via the study of the first cohomology group.

Idea de las demostraciones en el caso suave

Teorema: (Gromov, 1981)

Para todo $n \geq 3$, existe $\varepsilon(n) > 0$ tal que toda variedad cpct sin frontera (M, g) con

$$\mathrm{diam}(M)^2 \mathrm{Ricci_g} \geq -\varepsilon(\mathrm{n})$$

satisface $b_1(M) \leq n$.

Para demostrarlo pasamos a la variedad cociente:

$$\overline{M} = \widetilde{M}/H \quad \text{donde} \quad H = [\pi_1(M), \pi_1(M)],$$

que satisface lo siguiente.

⋆ Gromov: Para cada $k \geq 1$ y $\bar{x} \in \overline{M}$ fijos existe un subgrupo

$$\Gamma(k) = \langle \gamma_i \rangle \quad \text{de} \quad \Gamma = \pi_1(M)/H,$$

con $\Gamma(k) \cong \mathbb{Z}^{\mathrm{b}_1(M)}$ tal que

- $k \operatorname{diam}(M) < d_{\overline{M}}(\gamma(\bar{x}), \bar{x})$ para todo $\gamma \in \Gamma(k) \setminus \{0\}$
- $d_{\overline{M}}(\gamma_i(\bar{x}), \bar{x}) \leq 2k \operatorname{diam}(M)$ para $i = 1, \ldots, \mathrm{b}_1(M)$

★ Gromov: Sea (M^n, g) una variedad riemanniana completa con $\mathrm{Ricci_g} \geq (\mathrm{n}-1)\mathrm{k}$, entonces para todo $x \in M$ fijo, la función

$$(0, \infty) \ni r \mapsto \frac{\mathrm{vol}(B(x, r))}{v_{n,k}(r)} \quad \text{es no creciente.}$$

En particular para $R \geq r > 0$,

$$\frac{v_{n,k}(R)}{v_{n,k}(r)} \geq \frac{\mathrm{vol}(B(x, R))}{\mathrm{vol}(B(x, r))}$$

Demostración:

Suponga $\mathrm{Ricci} \leq 0$. *Aplique el lema anterior con* $k = 1$*: i.e. existe* $\Gamma(1) = < \gamma_1, ..., \gamma_{\mathrm{b}_1} > \subset \Gamma$ *tal que*

$$\mathrm{diam}(M) < \mathrm{d}_{\bar{M}}(\gamma(\bar{x}), \bar{x}) \text{ para elementos no triviales } \gamma \in \Gamma(1)$$

y

$$\mathrm{d}_{\bar{M}}(\gamma_i(\bar{x}), \bar{x}) \leq 2\,\mathrm{diam}(M) \quad \forall i = 1, \ldots, \mathrm{b}_1.$$

$$\Longrightarrow \left\{ B_{\mathrm{diam}(M)/2}(\gamma(\bar{x})) \ : \ \gamma \in \Gamma(1) \right\} \text{ es ajena a pares.}$$

Para $r > 0$*, sea*

$$I_r = \left\{ \gamma = l_1\gamma_1 + \cdots + l_{\mathrm{b}_1}\gamma_{\mathrm{b}_1} \in \Gamma(1) \ : \ |l_1| + \cdots + |l_{\mathrm{b}_1}| \leq r, \ \ l_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Para todo $\gamma \in I_r$ *se tiene*

$$B_{\mathrm{diam}(M)/2}(\gamma(\bar{x})) \subset B_{2r\,\mathrm{diam}(M) + \mathrm{diam}(M)/2}(\bar{x}).$$

Como las bolas anteriores son isométricas:

$$|I_r| \operatorname{vol}_{\bar{M}}(B_{\operatorname{diam}(M)/2}(\gamma(\bar{x}))) \leq \operatorname{vol}_{\bar{M}}(B_{2r\operatorname{diam}(M)+\operatorname{diam}(M)/2}(\bar{x})).$$

Note que

$$\mathrm{b}_1 \leq |I_r| \ \text{ para } \ r \geq 1 \quad \text{y} \quad |I_r| = (2r+1)^{\mathrm{b}_1} \ \text{ para } \ r \in \mathbb{N}$$

Usando Bishop-Gromov para encontrar una cota

$$|I_r| \leq C(r, -\mathrm{Ricci}(\mathrm{M}) \operatorname{diam}^2(\mathrm{M}), \mathrm{n}).$$

Con una expansion de Taylor para $-\mathrm{Ricci}(\mathrm{M}) \operatorname{diam}^2(\mathrm{M})$ pequeño:

$$C(r, -\mathrm{Ricci}(\mathrm{M}) \operatorname{diam}^2(\mathrm{M}), \mathrm{n}) \leq 5^{\mathrm{n}}\mathrm{r}^{\mathrm{n}}.$$

Si $\mathrm{b}_1 > n$ encuentramos una contradicción con r grande. $\square$

Obs: Si $\operatorname{diam}(M) = 1$ entonces la bola $B_R(\bar{x})$ contiene al menos $\lfloor R/k \rfloor^{\mathrm{b}_1}$ bolas de radio $1/2$.

segundo teorema a demostrar

Teorema: (Cheeger-Colding, 2000)

Para todo $n \geq 3$, existe $\varepsilon(n) > 0$ tal que toda variedad cpct sin frontera (M, g) con

$$b_1(M) = n \quad \& \quad \mathrm{diam}(M)^2 \mathrm{Ricci_g} \geq -\varepsilon(\mathrm{n})$$

es biholder a un toro plano.

para demostrar lo anterior necesitamos primero:

Teorema: (Colding)

Sea $n \in \mathbb{N}$ *y* $\varepsilon \in (0,1)$ *entonces existe* $\delta(\varepsilon, n) > 0$ *tal que si* (M^n, g) *es una variedad riemanniana cerrada con*

$$\mathrm{Ricci_g} \geq -\delta, \quad \mathrm{b_1(M) = n}, \quad \mathrm{diam}(\mathrm{M}) = 1,$$

donde $\delta \in (0, \delta(\varepsilon, n)]$, *entonces*

$$\mathrm{d}_{mGH}(B^{\bar{M}}_{\varepsilon^{-1}}(\bar{x}), B^{\mathbb{R}^n}_{\varepsilon^{-1}}(0^n)) \leq \varepsilon.$$

Demostración:

Inductivamente usando la Obs para $i = 1, ..., n$, existe:

$$\delta_i(n,\varepsilon) > 0,\ \bar{x}_i,\ p_1, ..., p_i \in \bar{M} \ \ \textit{con} \ \ d_{\bar{M}}(p_j, \bar{x}_i) \ \ \textit{grande} \ \ j = 1, \ldots, i,$$

tal que definiendo para $j = 1, \ldots, i$

$$b_j^+ = d_{\bar{M}_j}(p_j, \cdot) - d_{\bar{M}_j}(p_j, \bar{x}_i)$$

y tomando sus correspondientes funciones armónicas b_j, se tiene que

$$|Hess(b_j)|_{L^2},\ |b_j - b_j^+|_{W^{1,2}},\ |\langle b_{j_1}^+, b_{j_2}^+\rangle|_{L^1}$$

son suficientemente pequeñas con una cota que depende de $\delta_i(n,\varepsilon)$.

Proposición: (Colding)

Sea (M_i^n, g_i) *una sucesión de variedades riemannianas cerrradas con*

$$\mathrm{Ricci}_{g_i} \geq -K_i, \quad b_1(M_i) = n, \quad \mathrm{diam}(M_i) = 1,$$

tal que $K_i > 0$ *y* $K_i \downarrow 0$. *Fije agún* $\bar{x}_i \in \bar{M}_i$ *y defina*

$$M_i' = \bar{M}_i / \Gamma_i(3).$$

Entonces cualquier límite GH de $\{M_i'\}$ *es isométrico a un toro plano de dimensión* n.

Teorema: (Cheeger-Colding)

Si N^n *es una variedad riemanniana cerrada, entonces existe* $\varepsilon(N) > 0$ *tal que si* M^n *satisface* $\mathrm{Ricci}_M \geq -(n-1)$ *y* $d_{GH}(M, N) < \varepsilon(n)$. *Entonces M y N son biholder.*

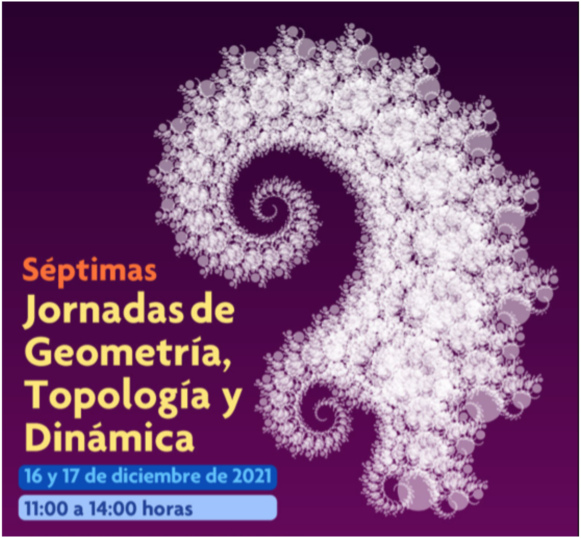
para terminar volvamos a ver los resultados en el caso no suave

Teoremas: (Mondello-Mondino-P, 2021)

- ♢ *Para todo* $N \in [1, \infty)$ *existe* $\varepsilon(N) > 0$ *tal que cualquier espacio* $\mathrm{RCD}^*(K, N)$, $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$, *cpcto con* $\mathrm{diam}^2(X)K \geq -\varepsilon(N)$ *satisface* $\mathrm{b}_1(X) \leq \lfloor N \rfloor$.

- ♢ *Para todo* $N \in [1, \infty)$ *existe* $\delta(N) > 0$ *con la siguiente propiedad:*
  Cualquier espacio $\mathrm{RCD}^*(K, N)$, $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$, *con* $\mathrm{diam}^2(X)K > -\delta(N)$ *and* $\mathrm{b}_1(X) = \lfloor N \rfloor$ *satisface,*
  - $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ *tiene dimension esencial igual a* $\lfloor N \rfloor$ *y es* $\lfloor N \rfloor$*-rectificable como espacio métrico de medida*
  - *Existe una cubierta finita* $(X', \mathsf{d}_{X'}, \mathfrak{m}_{X'})$ *de* $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ *que es* $\varepsilon(\delta|N)$*-mGH cercana a un toro plano de dimensión* $\lfloor N \rfloor$
  - *Si además* $N \in \mathbb{N}$, *entonces* $\mathfrak{m} = c\mathcal{H}^N$ *para alguna constante* $c > 0$ *y* (X, d) *es bi-Hölder a un toro plano N-dimensional.*

c.f. Gigli-Rigoni's Recognizing the flat torus among $\mathrm{RCD}^*(0, N)$ spaces via the study of the first cohomology group.



Gracias por su atención