

Sobre las Variedades de Gráficas de Dimensiones Superiores.

Adriana Haydeé Contreras Peruyero

Instituto de Matemáticas, UNAM, ITSMT

25 de Marzo de 2021

1 Antecedentes

2 Isomorfismos preservan piezas

- π_1 -inyectividad de variedades de curvatura negativa
- Crecimiento uniformemente exponencial
- Cubriente universal como árbol de espacios
- Propiedades métricas de \tilde{M}
- Propiedades de los estabilizadores de paredes

3 Encajes cuasi-isométricos

- Variedades con descomposiciones cuspidales
- Grupos relativamente hiperbólicos
- Espacio Eléctrico

4 ¿A futuro?

Como una extensión de las ideas de R. Frigerio, J.F. Lafont and A. Sisto en [6], N. Bárcenas, D. Juan-Pineda y P. Suárez-Serrato describieron las siguientes n -variedades suaves para $n \geq 3$, [1].

Definición 1

- ① *Para cada $i = 1, \dots, r$ sean $2 \leq n_i \leq n$ y V_i una n_i -variedad de curvatura negativa pinchada, no compacta, completa y de volumen finito.*

Como una extensión de las ideas de R. Frigerio, J.F. Lafont and A. Sisto en [6], N. Bárcenas, D. Juan-Pineda y P. Suárez-Serrato describieron las siguientes n -variedades suaves para $n \geq 3$, [1].

Definición 1

- ① *Para cada $i = 1, \dots, r$ sean $2 \leq n_i \leq n$ y V_i una n_i -variedad de curvatura negativa pinchada, no compacta, completa y de volumen finito.*
- ② *Denotar por B_i la variedad diferenciable, compacta con frontera, obtenida por truncar las cúspides de V_i , es decir, por remover de V_i una vecindad abierta, horoesférica (no maximal) de cada cúspide.*

Como una extensión de las ideas de R. Frigerio, J.F. Lafont and A. Sisto en [6], N. Bárcenas, D. Juan-Pineda y P. Suárez-Serrato describieron las siguientes n -variedades suaves para $n \geq 3$, [1].

Definición 1

- ① *Para cada $i = 1, \dots, r$ sean $2 \leq n_i \leq n$ y V_i una n_i -variedad de curvatura negativa pinchada, no compacta, completa y de volumen finito.*
- ② *Denotar por B_i la variedad diferenciable, compacta con frontera, obtenida por truncar las cúspides de V_i , es decir, por remover de V_i una vecindad abierta, horoesférica (no maximal) de cada cúspide.*
- ③ *Tomar un fibrado $Z_i \rightarrow B_i$ con fibra un cociente compacto N_i de un grupo de Lie aesférico, nilpotente, simplemente conexo \widetilde{N}_i por la acción de una retícula uniforme Γ_i de dimensión $n - n_i$, es decir, N_i es difeomorfo a \widetilde{N}_i/Γ_i , donde \widetilde{N}_i es un grupo de Lie simplemente conexo y Γ_i es una retícula uniforme.*

- ④ Fijar un par de difeomorfismos entre los componentes de frontera de distintos Z_i , e identificar pares de componentes de frontera usando difeomorfismos, para obtener una variedad conexa de dimensión n .

- Fijar un par de difeomorfismos entre los componentes de frontera de distintos Z_i , e identificar pares de componentes de frontera usando difeomorfismos, para obtener una variedad conexa de dimensión n .
- A una variedad que se construye de esta forma le llamaremos **variedad de gráficas de dimensión superior**.

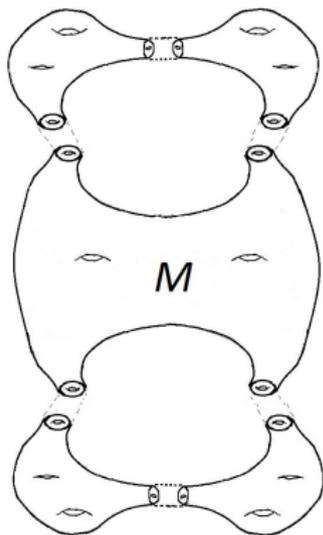
• Fijar un par de difeomorfismos entre los componentes de frontera de distintos Z_i , e identificar pares de componentes de frontera usando difeomorfismos, para obtener una variedad conexa de dimensión n .

- A una variedad que se construye de esta forma le llamaremos **variedad de gráficas de dimensión superior**.
- Llamaremos a los Z_i las piezas de M y cuando $\dim(B_i) = n$, diremos que $Z_i = B_i$ es una pieza pura.

• Fijar un par de difeomorfismos entre los componentes de frontera de distintos Z_i , e identificar pares de componentes de frontera usando difeomorfismos, para obtener una variedad conexa de dimensión n .

- A una variedad que se construye de esta forma le llamaremos **variedad de gráficas de dimensión superior**.
- Llamaremos a los Z_i las piezas de M y cuando $\dim(B_i) = n$, diremos que $Z_i = B_i$ es una pieza pura.
- Las fronteras de las piezas Z_i que se identifican las llamamos las **paredes** de M y las denotamos por W^{ij} .

Tam Nguyen Phan describe una subfamilia de estas variedades a las que le llama **Variedades con Descomposiciones Cuspidales**. En estas variedades, todas sus piezas son piezas puras.



Teoream A

Sean M_1, M_2 dos variedades de gráficas como las descritas en la definición 1. Sean $\Lambda_1 \leq \pi_1(M_1)$ un subgrupo conjugado al grupo fundamental de una pieza en M_1 y $\varphi : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$ un isomorfismo. Entonces $\varphi(\Lambda_1)$ es conjugado al grupo fundamental $\Lambda_2 \leq \pi_1(M_2)$ de una pieza en M_2 .

Teorema B

Sea M una variedad que se descompone en cúspides. Entonces, la inclusión de cada pared y pieza inducen encajes cuasi-isométricos de sus grupos fundamentales en su imagen en $\pi_1(M)$.

Teorema 1 (N. Bárcenas, D. Juan-Pineda, P. Suárez-Serrato, 2016)

Sea M una variedad de dimensión n como la descrita en la Definición 1, para $n \geq 6$. Entonces M satisface la conjetura de Borel, es decir, dada una equivalencia homotópica $f : M \rightarrow M'$, donde M' es una variedad aesférica de dimensión n , entonces f es homotópica a un homeomorfismo.

Teorema 1 (N. Bárcenas, D. Juan-Pineda, P. Suárez-Serrato, 2016)

Sea M una variedad de dimensión n como la descrita en la Definición 1, para $n \geq 6$. Entonces M satisface la conjetura de Borel, es decir, dada una equivalencia homotópica $f : M \rightarrow M'$, donde M' es una variedad aesférica de dimensión n , entonces f es homotópica a un homeomorfismo.

Lema 2

Si M es una variedad (posiblemente con frontera) como las descritas en la definición 1, entonces M es aesférica.

- T una gráfica conexa, no vacía.

Gráficas de Grupos \mathcal{G}

- T una gráfica conexa, no vacía.
- G_v grupo asociado a cada vértice $v \in V(T)$.

Gráficas de Grupos \mathcal{G}

- T una gráfica conexa, no vacía.
- G_v grupo asociado a cada vértice $v \in V(T)$.
- G_y grupo asociado a cada arista $y \in A(T)$.

Gráficas de Grupos \mathcal{G}

- T una gráfica conexa, no vacía.
- G_v grupo asociado a cada vértice $v \in V(T)$.
- G_y grupo asociado a cada arista $y \in A(T)$.
- $G_y \longrightarrow G_v$ un monomorfismo.

Gráficas de Grupos \mathcal{G}

- T una gráfica conexa, no vacía.
- G_v grupo asociado a cada vértice $v \in V(T)$.
- G_y grupo asociado a cada arista $y \in A(T)$.
- $G_y \longrightarrow G_v$ un monomorfismo.
- $G_{\bar{y}} = G_y$.

Por ejemplo:

- T es el segmento $P \xrightarrow{y} Q$.

Gráficas de Grupos \mathcal{G}

- T una gráfica conexa, no vacía.
- G_v grupo asociado a cada vértice $v \in V(T)$.
- G_y grupo asociado a cada arista $y \in A(T)$.
- $G_y \longrightarrow G_v$ un monomorfismo.
- $G_{\bar{y}} = G_y$.

Por ejemplo:

- T es el segmento $P \xrightarrow{y} Q$.
- Consideramos tres grupos: G_P, G_Q y $G_y = G_{\bar{y}}$.

Gráficas de Grupos \mathcal{G}

- T una gráfica conexa, no vacía.
- G_v grupo asociado a cada vértice $v \in V(T)$.
- G_y grupo asociado a cada arista $y \in A(T)$.
- $G_y \longrightarrow G_v$ un monomorfismo.
- $G_{\bar{y}} = G_y$.

Por ejemplo:

- T es el segmento $P \xrightarrow{y} Q$.
- Consideramos tres grupos: G_P, G_Q y $G_y = G_{\bar{y}}$.
- Dos monomorfismos $G_y \xrightarrow{\bar{y}} G_P$ y $G_y \xrightarrow{y} G_Q$.

Gráficas de Grupos \mathcal{G}

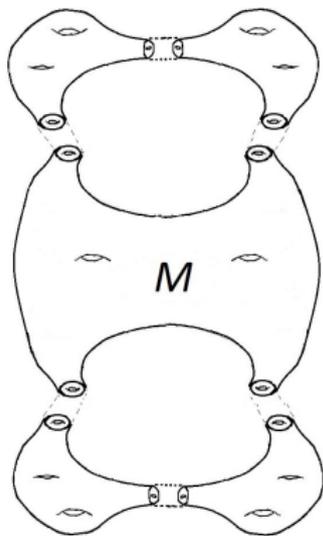
- T una gráfica conexa, no vacía.
- G_v grupo asociado a cada vértice $v \in V(T)$.
- G_y grupo asociado a cada arista $y \in A(T)$.
- $G_y \longrightarrow G_v$ un monomorfismo.
- $G_{\bar{y}} = G_y$.

Por ejemplo:

- T es el segmento $P \xrightarrow{y} Q$.
- Consideramos tres grupos: G_P, G_Q y $G_y = G_{\bar{y}}$.
- Dos monomorfismos $G_y \xrightarrow{\bar{y}} G_P$ y $G_y \xrightarrow{y} G_Q$.
- El grupo fundamental de esta gráfica de grupos es $\pi_1(\mathcal{G}) = G_P *_{G_y} G_Q$.

Teorema 3

El grupo fundamental de una variedad M como las descritas en la definición 1 es isomorfo al grupo fundamental de una gráfica de grupos.



Teorema 4

Si $\pi_1(E_i)$ se inyecta en $\pi_1(B_i)$ entonces $\pi_1(W^{ij})$ se inyecta en $\pi_1(Z_i)$.

Demostración:

- Para cada fin E_i , la variedad V_i se puede retraer a $B_i^* = V_i - \bigcup_{i=1}^k O_i$.

Teorema 4

Si $\pi_1(E_i)$ se inyecta en $\pi_1(B_i)$ entonces $\pi_1(W^{ij})$ se inyecta en $\pi_1(Z_i)$.

Demostración:

- Para cada fin E_i , la variedad V_i se puede retraer a $B_i^* = V_i - \bigcup_{i=1}^k O_i$.
- Reemplazar cada O_i por una horobola concéntrica no maximal, de tal forma que V_i es difeomorfa al interior de B_i^* .

Teorema 4

Si $\pi_1(E_i)$ se inyecta en $\pi_1(B_i)$ entonces $\pi_1(W^{ij})$ se inyecta en $\pi_1(Z_i)$.

Demostración:

- Para cada fin E_i , la variedad V_i se puede retraer a $B_i^* = V_i - \bigcup_{i=1}^k O_i$.
- Reemplazar cada O_i por una horobola concéntrica no maximal, de tal forma que V_i es difeomorfa al interior de B_i^* .
- $\pi_1(E_i) \hookrightarrow \pi_1(B_i)$.
-

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_1(N_i) & \longrightarrow & \pi_1(W^{ij}) & \longrightarrow & \pi_1(E_i) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \pi_1(N_i) & \longrightarrow & \pi_1(Z_i) & \longrightarrow & \pi_1(B_i) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Teorema 4

Si $\pi_1(E_i)$ se inyecta en $\pi_1(B_i)$ entonces $\pi_1(W^{ij})$ se inyecta en $\pi_1(Z_i)$.

Demostración:

- Para cada fin E_i , la variedad V_i se puede retraer a $B_i^* = V_i - \bigcup_{i=1}^k O_i$.
- Reemplazar cada O_i por una horobola concéntrica no maximal, de tal forma que V_i es difeomorfa al interior de B_i^* .
- $\pi_1(E_i) \hookrightarrow \pi_1(B_i)$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_1(N_i) & \longrightarrow & \pi_1(W^{ij}) & \longrightarrow & \pi_1(E_i) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \pi_1(N_i) & \longrightarrow & \pi_1(Z_i) & \longrightarrow & \pi_1(B_i) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- $\pi_1(W^{ij}) \hookrightarrow \pi_1(Z_i)$.

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 3:

- \mathcal{G}_M la gráfica de grupos asociada a la descomposición de M .

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 3:

- \mathcal{G}_M la gráfica de grupos asociada a la descomposición de M .
- Asociar a Z_i su grupo fundamental $\pi_1(Z_i)$, grupo de vértices.

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 3:

- \mathcal{G}_M la gráfica de grupos asociada a la descomposición de M .
- Asociar a Z_i su grupo fundamental $\pi_1(Z_i)$, grupo de vértices.
- El grupo de aristas corresponde a $\pi_1(W^{ij})$.

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 3:

- \mathcal{G}_M la gráfica de grupos asociada a la descomposición de M .
- Asociar a Z_i su grupo fundamental $\pi_1(Z_i)$, grupo de vértices.
- El grupo de aristas corresponde a $\pi_1(W^{ij})$.
- Por el teorema 4, existe un monomorfismo del grupo de aristas $\pi_1(W^{ij})$ sobre el grupo de vértices adyacentes $\pi_1(Z_i)$.

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 3:

- \mathcal{G}_M la gráfica de grupos asociada a la descomposición de M .
- Asociar a Z_i su grupo fundamental $\pi_1(Z_i)$, grupo de vértices.
- El grupo de aristas corresponde a $\pi_1(W^{ij})$.
- Por el teorema 4, existe un monomorfismo del grupo de aristas $\pi_1(W^{ij})$ sobre el grupo de vértices adyacentes $\pi_1(Z_i)$.
- $\pi_1(M) \cong \pi_1(\mathcal{G}_M)$.

- X, Y dos espacios métricos.

- X, Y dos espacios métricos.
- $\phi : X \rightarrow Y$ es un **encaje casi-isométrico** si existen constantes $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ tales que para todo $x_1, x_2 \in X$ se cumple

- X, Y dos espacios métricos.
- $\phi : X \rightarrow Y$ es un **encaje casi-isométrico** si existen constantes $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ tales que para todo $x_1, x_2 \in X$ se cumple

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x_1, x_2) - c \leq d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + c$$

- X, Y dos espacios métricos.
- $\phi : X \rightarrow Y$ es un **encaje casi-isométrico** si existen constantes $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ tales que para todo $x_1, x_2 \in X$ se cumple

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x_1, x_2) - c \leq d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + c$$

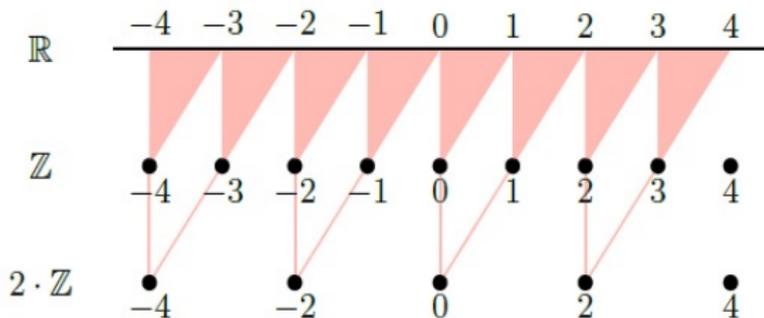
- Si existe una constante $D \geq 0$, tal que cualquier punto en Y se encuentra a una distancia pequeña D de algún punto en $\phi(X)$ se dice que es una **casi-isometría**.

- Las casi-isometrías no preservan dimensión.

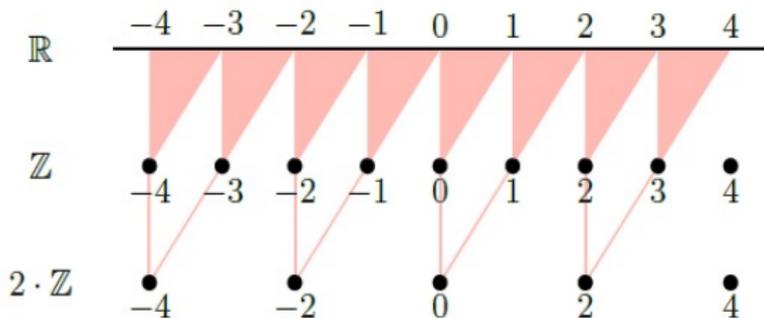
- Las casi-isometrías no preservan dimensión.
- Cualquier espacio métrico de diámetro finito es casi-isométrico a un punto.

- Las casi-isometrías no preservan dimensión.
- Cualquier espacio métrico de diámetro finito es casi-isométrico a un punto.
- El espacio métrico \mathbf{Z} es casi-isométrico a \mathbf{R} .

- Las casi-isometrías no preservan dimensión.
- Cualquier espacio métrico de diámetro finito es casi-isométrico a un punto.
- El espacio métrico \mathbf{Z} es casi-isométrico a \mathbf{R} .



- Las casi-isometrías no preservan dimensión.
- Cualquier espacio métrico de diámetro finito es casi-isométrico a un punto.
- El espacio métrico \mathbf{Z} es casi-isométrico a \mathbf{R} .



- \mathbf{Z}^2 no es casi-isométrico a \mathbf{F}^2 .

Crecimiento uniformemente exponencial

- Γ grupo finitamente generado por un conjunto S .

Crecimiento uniformemente exponencial

- Γ grupo finitamente generado por un conjunto S .
- La **función de crecimiento** $\beta(\Gamma, S; k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, es el número de elementos $\gamma \in \Gamma$ con $l_S(\gamma) \leq k$.

Crecimiento uniformemente exponencial

- Γ grupo finitamente generado por un conjunto S .
- La **función de crecimiento** $\beta(\Gamma, S; k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, es el número de elementos $\gamma \in \Gamma$ con $l_S(\gamma) \leq k$.
- El grupo Γ es de **crecimiento exponencial**, si existen $A, B > 0$ tales que para $n \geq 0$, $\beta(\Gamma, S; n) \geq A \exp^{Bn}$.

Crecimiento uniformemente exponencial

- Γ grupo finitamente generado por un conjunto S .
- La **función de crecimiento** $\beta(\Gamma, S; k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, es el número de elementos $\gamma \in \Gamma$ con $l_S(\gamma) \leq k$.
- El grupo Γ es de **crecimiento exponencial**, si existen $A, B > 0$ tales que para $n \geq 0$, $\beta(\Gamma, S; n) \geq A \exp^{Bn}$.
- El **tipo de crecimiento exponencial** es $\omega(\Gamma, S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\beta(\Gamma, S; k)}$.

Crecimiento uniformemente exponencial

- Γ grupo finitamente generado por un conjunto S .
- La **función de crecimiento** $\beta(\Gamma, S; k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, es el número de elementos $\gamma \in \Gamma$ con $l_S(\gamma) \leq k$.
- El grupo Γ es de **crecimiento exponencial**, si existen $A, B > 0$ tales que para $n \geq 0$, $\beta(\Gamma, S; n) \geq A \exp^{Bn}$.
- El **tipo de crecimiento exponencial** es $\omega(\Gamma, S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\beta(\Gamma, S; k)}$.
- $\omega(\Gamma) = \inf\{\omega(\Gamma, S) : S \text{ es un conjunto finito de generadores de } \Gamma\}$.

Crecimiento uniformemente exponencial

- Γ grupo finitamente generado por un conjunto S .
- La **función de crecimiento** $\beta(\Gamma, S; k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, es el número de elementos $\gamma \in \Gamma$ con $l_S(\gamma) \leq k$.
- El grupo Γ es de **crecimiento exponencial**, si existen $A, B > 0$ tales que para $n \geq 0$, $\beta(\Gamma, S; n) \geq A \exp^{Bn}$.
- El **tipo de crecimiento exponencial** es $\omega(\Gamma, S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\beta(\Gamma, S; k)}$.
- $\omega(\Gamma) = \inf\{\omega(\Gamma, S) : S \text{ es un conjunto finito de generadores de } \Gamma\}$.
- **Crecimiento uniformemente exponencial** si $\omega(\Gamma) > 1$.

Teorema 5 (P. de la Harpe, M. Bucher, [7])

Sean A, B dos grupos finitamente generados y sea C un grupo dado como un subgrupo de A y de B . Asumir que $([A : C] - 1)([B : C] - 1) \geq 2$, donde $([A : C] - 1) \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ denota el índice de un subgrupo C en A . Entonces

$$\omega(A *_C B) \geq \sqrt[4]{2}.$$

En particular, el producto libre con amalgamación $A *_C B$ es de crecimiento uniformemente exponencial.

Teorema 6

El grupo fundamental de una variedad M como las descritas en la definición 1 tiene crecimiento uniformemente exponencial.

DEMOSTRACIÓN:

- Fijemos Z_i, Z_j y W^{ij} .

Teorema 6

El grupo fundamental de una variedad M como las descritas en la definición 1 tiene crecimiento uniformemente exponencial.

DEMOSTRACIÓN:

- Fijemos Z_i, Z_j y W^{ij} .
- $\pi_1(Z_i) *_{\pi_1(W^{ij})} \pi_1(Z_j)$.

Teorema 6

El grupo fundamental de una variedad M como las descritas en la definición 1 tiene crecimiento uniformemente exponencial.

DEMOSTRACIÓN:

- Fijemos Z_i, Z_j y W^{ij} .
- $\pi_1(Z_i) *_{\pi_1(W^{ij})} \pi_1(Z_j)$.
- $\pi_1(W^{ij})$ es finitamente generado.

Teorema 6

El grupo fundamental de una variedad M como las descritas en la definición 1 tiene crecimiento uniformemente exponencial.

DEMOSTRACIÓN:

- Fijemos Z_i, Z_j y W^{ij} .
- $\pi_1(Z_i) *_{\pi_1(W^{ij})} \pi_1(Z_j)$.
- $\pi_1(W^{ij})$ es finitamente generado.
- Por el teorema 4, $\pi_1(B_i)$ es finitamente generado.

Teorema 6

El grupo fundamental de una variedad M como las descritas en la definición 1 tiene crecimiento uniformemente exponencial.

DEMOSTRACIÓN:

- Fijemos Z_i, Z_j y W^{ij} .
- $\pi_1(Z_i) *_{\pi_1(W^{ij})} \pi_1(Z_j)$.
- $\pi_1(W^{ij})$ es finitamente generado.
- Por el teorema 4, $\pi_1(B_i)$ es finitamente generado.

- $\pi_1(N_i)$ es finitamente generado.

- $\pi_1(N_i)$ es finitamente generado.
- $0 \longrightarrow \pi_1(N_i) \longrightarrow \pi_1(Z_i) \longrightarrow \pi_1(M_i) \longrightarrow 0$

- $\pi_1(N_i)$ es finitamente generado.
- $0 \longrightarrow \pi_1(N_i) \longrightarrow \pi_1(Z_i) \longrightarrow \pi_1(M_i) \longrightarrow 0$
- $\pi_1(Z_i)$ es finitamente generado.

- $\pi_1(N_i)$ es finitamente generado.
- $0 \longrightarrow \pi_1(N_i) \longrightarrow \pi_1(Z_i) \longrightarrow \pi_1(M_i) \longrightarrow 0$
- $\pi_1(Z_i)$ es finitamente generado.
- Por lo tanto $\pi_1(Z_i) *_{\pi_1(W_{ij})} \pi_1(Z_j)$ tiene crecimiento uniformemente exponencial.

Cubriente universal como árbol de espacios

- \mathcal{G} una gráfica de grupos y G su grupo fundamental.

Cubriente universal como árbol de espacios

- \mathcal{G} una gráfica de grupos y G su grupo fundamental.
- T árbol de Bass-Serre de \mathcal{G} , en el cual G actúa por isometrías.

Cubriente universal como árbol de espacios

- \mathcal{G} una gráfica de grupos y G su grupo fundamental.
- T árbol de Bass-Serre de \mathcal{G} , en el cual G actúa por isometrías.
- G actúa sin inversión de aristas, es decir, si un elemento $g \in G$ y una arista $a \in T$ son tales que $g(a) = a$, entonces g no intercambia los vértices de a .

Cubriente universal como árbol de espacios

- \mathcal{G} una gráfica de grupos y G su grupo fundamental.
- T árbol de Bass-Serre de \mathcal{G} , en el cual G actúa por isometrías.
- G actúa sin inversión de aristas, es decir, si un elemento $g \in G$ y una arista $a \in T$ son tales que $g(a) = a$, entonces g no intercambia los vértices de a .
- (N, ϕ, T) árbol de espacios, N variedad Riemanniana.

Cubriente universal como árbol de espacios

- \mathcal{G} una gráfica de grupos y G su grupo fundamental.
- T árbol de Bass-Serre de \mathcal{G} , en el cual G actúa por isometrías.
- G actúa sin inversión de aristas, es decir, si un elemento $g \in G$ y una arista $a \in T$ son tales que $g(a) = a$, entonces g no intercambia los vértices de a .
- (N, ϕ, T) árbol de espacios, N variedad Riemanniana.
- Una **pared** W de N es la cerradura de la preimagen bajo ϕ del interior de una arista de T . Denotamos por d_W a la métrica por trayectorias inducida en W por la restricción de la estructura riemanniana de N .

Cubriente universal como árbol de espacios

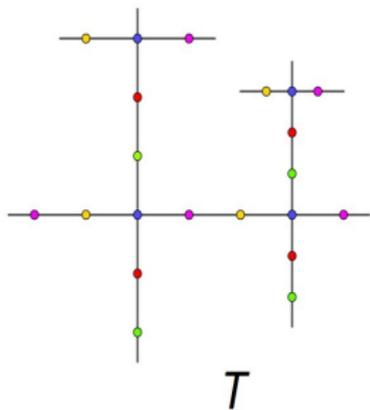
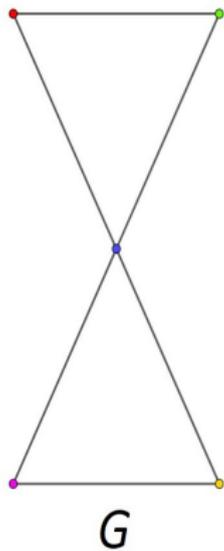
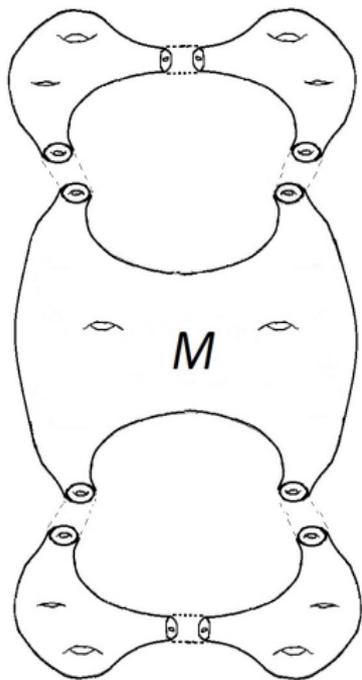
- \mathcal{G} una gráfica de grupos y G su grupo fundamental.
- T árbol de Bass-Serre de \mathcal{G} , en el cual G actúa por isometrías.
- G actúa sin inversión de aristas, es decir, si un elemento $g \in G$ y una arista $a \in T$ son tales que $g(a) = a$, entonces g no intercambia los vértices de a .
- (N, ϕ, T) árbol de espacios, N variedad Riemanniana.
- Una **pared** W de N es la cerradura de la preimagen bajo ϕ del interior de una arista de T . Denotamos por d_W a la métrica por trayectorias inducida en W por la restricción de la estructura riemanniana de N .
- Una **cámara** $C \subseteq N$ es la preimagen bajo ϕ de un vértice de T . Denotamos por d_C a la métrica por trayectorias inducida en C por la restricción de la estructura Riemanniana de N .

- Dos cámaras son adyacentes, si los correspondientes vértices de T están unidos por una arista.

- Dos cámaras son adyacentes, si los correspondientes vértices de T están unidos por una arista.
- Una pared W es adyacente a una cámara C si $W \cap C \neq \emptyset$. Si W es una pared, entonces W es adyacente a una cámara C si y sólo si el vértice correspondiente a C es el punto final de la arista correspondiente a W .

- Dos cámaras son adyacentes, si los correspondientes vértices de T están unidos por una arista.
- Una pared W es adyacente a una cámara C si $W \cap C \neq \emptyset$. Si W es una pared, entonces W es adyacente a una cámara C si y sólo si el vértice correspondiente a C es el punto final de la arista correspondiente a W .
- El grupo fundamental de una pieza de M coincide con el estabilizador de un vértice de T .

- Dos cámaras son adyacentes, si los correspondientes vértices de T están unidos por una arista.
- Una pared W es adyacente a una cámara C si $W \cap C \neq \emptyset$. Si W es una pared, entonces W es adyacente a una cámara C si y sólo si el vértice correspondiente a C es el punto final de la arista correspondiente a W .
- El grupo fundamental de una pieza de M coincide con el estabilizador de un vértice de T .
- El grupo fundamental de W_{ij} corresponde a los estabilizadores de aristas de T .



Cada componente frontera de Z_i es π_1 -inyectivo en Z_i . Esto implica que cada pieza y cada componente frontera de una pieza son π_1 -inyectivas en M .

Cada componente frontera de Z_i es π_1 -inyectivo en Z_i . Esto implica que cada pieza y cada componente frontera de una pieza son π_1 -inyectivas en M .

Corolario 7

Sea M una variedad de gráficas y \tilde{M} su cubriente universal. Entonces, se cumple lo siguiente para el árbol de espacios (\tilde{M}, ϕ, T) .

- 1 Sea C una cámara de \tilde{M} , entonces C es homeomorfa a $\tilde{Z}_i \cong \tilde{B}_i \times \tilde{N}_i$, donde $\tilde{Z}_i, \tilde{B}_i, \tilde{N}_i$ son los cubrientes universales de Z_i, B_i y N_i respectivamente.
- 2 Si W es una pared de \tilde{M} , entonces W es homeomorfa a $\partial\tilde{B}_i \times \tilde{N}_i$ o $\tilde{B}_i \times \partial\tilde{N}_i$.

Lema 8

Sea M una variedad de gráficas y sea T el árbol de Bass-Serre correspondiente a la descomposición de M en piezas. Para cada vértice $v \in V(T)$ y cada arista $a \in A(T)$ denotemos por G_v, G_a los estabilizadores en $\pi_1(M)$ de v y a respectivamente. Si v es un vértice de T , entonces v es el único vértice que es fijado por G_v .

DEMOSTRACIÓN:

- Supongamos que G_v fija otro vértice $v' \neq v$.

Lema 8

Sea M una variedad de gráficas y sea T el árbol de Bass-Serre correspondiente a la descomposición de M en piezas. Para cada vértice $v \in V(T)$ y cada arista $a \in A(T)$ denotemos por G_v, G_a los estabilizadores en $\pi_1(M)$ de v y a respectivamente. Si v es un vértice de T , entonces v es el único vértice que es fijado por G_v .

DEMOSTRACIÓN:

- Supongamos que G_v fija otro vértice $v' \neq v$.
- G_v fija una arista e que sale de v .

Lema 8

Sea M una variedad de gráficas y sea T el árbol de Bass-Serre correspondiente a la descomposición de M en piezas. Para cada vértice $v \in V(T)$ y cada arista $a \in A(T)$ denotemos por G_v, G_a los estabilizadores en $\pi_1(M)$ de v y a respectivamente. Si v es un vértice de T , entonces v es el único vértice que es fijado por G_v .

DEMOSTRACIÓN:

- Supongamos que G_v fija otro vértice $v' \neq v$.
- G_v fija una arista e que sale de v .
- G_v está contenido en el estabilizador de e .

Lema 8

Sea M una variedad de gráficas y sea T el árbol de Bass-Serre correspondiente a la descomposición de M en piezas. Para cada vértice $v \in V(T)$ y cada arista $a \in A(T)$ denotemos por G_v, G_a los estabilizadores en $\pi_1(M)$ de v y a respectivamente. Si v es un vértice de T , entonces v es el único vértice que es fijado por G_v .

DEMOSTRACIÓN:

- Supongamos que G_v fija otro vértice $v' \neq v$.
- G_v fija una arista e que sale de v .
- G_v está contenido en el estabilizador de e .
- Los estabilizadores de aristas son grupos virtualmente nilpotentes.

Lema 8

Sea M una variedad de gráficas y sea T el árbol de Bass-Serre correspondiente a la descomposición de M en piezas. Para cada vértice $v \in V(T)$ y cada arista $a \in A(T)$ denotemos por G_v, G_a los estabilizadores en $\pi_1(M)$ de v y a respectivamente. Si v es un vértice de T , entonces v es el único vértice que es fijado por G_v .

DEMOSTRACIÓN:

- Supongamos que G_v fija otro vértice $v' \neq v$.
- G_v fija una arista e que sale de v .
- G_v está contenido en el estabilizador de e .
- Los estabilizadores de aristas son grupos virtualmente nilpotentes.
- Teorema 6, los estabilizadores de vértices tienen crecimiento uniformemente exponencial.
- G_v solo fija v .

Un grupo G es policíclico si tiene una serie cíclica, es decir, si existe una serie

$$\{1\} \triangleleft G_n \triangleleft \cdots \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$$

tal que G_i/G_{i+1} es cíclico. Si G es nilpotente, entonces G es policíclico.

Un grupo G es policíclico si tiene una serie cíclica, es decir, si existe una serie

$$\{1\} \triangleleft G_n \triangleleft \cdots \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$$

tal que G_i/G_{i+1} es cíclico. Si G es nilpotente, entonces G es policíclico.

Un grupo G es policíclico si tiene una serie cíclica, es decir, si existe una serie

$$\{1\} \triangleleft G_n \triangleleft \cdots \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$$

tal que G_i/G_{i+1} es cíclico. Si G es nilpotente, entonces G es policíclico.

Denotamos por $h(G)$ a la longitud de Hirsch $h(G) := \#\{i \mid G_i/G_{i+1} \cong \mathbb{Z}\}$.

Otras propiedades:

- Para una sucesión exacta corta $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow G/H \rightarrow 1$, se cumple que:

$$h(G) = h(H) + h(G/H).$$

- $h(G) = \text{vcd}(G)$, donde vcd denota la dimensión virtual cohomológica.
- M una variedad aesférica, cerrada de dimensión n , si $G = \pi_1(M)$ entonces $\text{vcd}(G) = n$.

Lema 9

Sean W_1, W_2 paredes distintas de \tilde{M} , y sea $v \in V(T)$ de tal forma que cualquier trayectoria que conecta a W_1 con W_2 interseca a la cámara correspondiente a v . Si $g \in \pi_1(M)$ es tal que $g(W_i) = W_i$ para $i = 1, 2$. Entonces, g es un elemento que pertenece a la parte de la fibra de $\pi_1(M)$.

Lema 10

Sea W una pared de M y denotemos por H a su estabilizador en $\pi_1(M)$.
Entonces, W es la única pared que es estabilizada por H .

DEMOSTRACIÓN:

- $h(H) = n - 1$ ya que H es esférica.

Lema 10

Sea W una pared de M y denotemos por H a su estabilizador en $\pi_1(M)$.
Entonces, W es la única pared que es estabilizada por H .

DEMOSTRACIÓN:

- $h(H) = n - 1$ ya que H es esférica.
- Supongamos H estabiliza otra pared $W' \neq W$.

Lema 10

Sea W una pared de M y denotemos por H a su estabilizador en $\pi_1(M)$.
Entonces, W es la única pared que es estabilizada por H .

DEMOSTRACIÓN:

- $h(H) = n - 1$ ya que H es esférica.
- Supongamos H estabiliza otra pared $W' \neq W$.
- Por el Lema 21, H está contenido $\pi_1(N_v)$.

Lema 10

Sea W una pared de M y denotemos por H a su estabilizador en $\pi_1(M)$.
Entonces, W es la única pared que es estabilizada por H .

DEMOSTRACIÓN:

- $h(H) = n - 1$ ya que H es aesférica.
- Supongamos H estabiliza otra pared $W' \neq W$.
- Por el Lema 21, H está contenido $\pi_1(N_v)$.
- Como N_v es una variedad aesférica, entonces la longitud de Hirsh de $\pi_1(N_v)$ es su vcd.

Lema 10

Sea W una pared de M y denotemos por H a su estabilizador en $\pi_1(M)$.
Entonces, W es la única pared que es estabilizada por H .

DEMOSTRACIÓN:

- $h(H) = n - 1$ ya que H es aesférica.
- Supongamos H estabiliza otra pared $W' \neq W$.
- Por el Lema 21, H está contenido $\pi_1(N_v)$.
- Como N_v es una variedad aesférica, entonces la longitud de Hirsh de $\pi_1(N_v)$ es su vcd.
- Así, $h(\pi_1(N_v)) \leq n - 2$.

Lema 10

Sea W una pared de M y denotemos por H a su estabilizador en $\pi_1(M)$.
Entonces, W es la única pared que es estabilizada por H .

DEMOSTRACIÓN:

- $h(H) = n - 1$ ya que H es aesférica.
- Supongamos H estabiliza otra pared $W' \neq W$.
- Por el Lema 21, H está contenido $\pi_1(N_v)$.
- Como N_v es una variedad aesférica, entonces la longitud de Hirsh de $\pi_1(N_v)$ es su vcd.
- Así, $h(\pi_1(N_v)) \leq n - 2$.
- W es la única pared que es estabilizada por H .

Propiedades métricas de \tilde{M}

- d distancia asociada a la estructura riemanniana de \tilde{M} .

Propiedades métricas de \tilde{M}

- d distancia asociada a la estructura riemanniana de \tilde{M} .
- $r \geq 0$, $X \subset \tilde{M}$, $N_r(X) \subset \tilde{M}$ es la vecindad de radio r de X , con respecto a la métrica d .

Propiedades métricas de \tilde{M}

- d distancia asociada a la estructura riemanniana de \tilde{M} .
- $r \geq 0$, $X \subset \tilde{M}$, $N_r(X) \subset \tilde{M}$ es la vecindad de radio r de X , con respecto a la métrica d .

Lema 11

- Sean W_1 y W_2 dos paredes de \tilde{M} tales que $W_1 \subset N_r(W_2)$. Entonces $W_1 = W_2$; en particular la distancia de Hausdorff entre distintas paredes de \tilde{M} es infinita.

Propiedades métricas de \tilde{M}

- d distancia asociada a la estructura riemanniana de \tilde{M} .
- $r \geq 0$, $X \subset \tilde{M}$, $N_r(X) \subset \tilde{M}$ es la vecindad de radio r de X , con respecto a la métrica d .

Lema 11

- Sean W_1 y W_2 dos paredes de \tilde{M} tales que $W_1 \subset N_r(W_2)$. Entonces $W_1 = W_2$; en particular la distancia de Hausdorff entre distintas paredes de \tilde{M} es infinita.
- Sea W una pared de \tilde{M} y sea C una cámara de \tilde{M} . Si $W \subset N_r(C)$, entonces W es adyacente a C .

Propiedades métricas de \tilde{M}

- d distancia asociada a la estructura riemanniana de \tilde{M} .
- $r \geq 0$, $X \subset \tilde{M}$, $N_r(X) \subset \tilde{M}$ es la vecindad de radio r de X , con respecto a la métrica d .

Lema 11

- Sean W_1 y W_2 dos paredes de \tilde{M} tales que $W_1 \subset N_r(W_2)$. Entonces $W_1 = W_2$; en particular la distancia de Hausdorff entre distintas paredes de \tilde{M} es infinita.
- Sea W una pared de \tilde{M} y sea C una cámara de \tilde{M} . Si $W \subset N_r(C)$, entonces W es adyacente a C .
- Sean C_1, C_2 dos cámaras de \tilde{M} tales que $C_1 \subset N_r(C_2)$. Entonces $C_1 = C_2$; en particular la distancia de Hausdorff entre distintas cámaras de \tilde{M} es infinita.

Propiedades de los estabilizadores de paredes

$\mathcal{N}(\pi_1(M)) = \{ H < \pi_1(M) \mid H \text{ es un subgrupo maximal nilpotente y } h(H) = n - 1 \}$.

Donde $h(H)$ denota la longitud de Hirsch de H .

Propiedades de los estabilizadores de paredes

$\mathcal{N}(\pi_1(M)) = \{ H < \pi_1(M) \mid H \text{ es un subgrupo maximal nilpotente y } h(H) = n - 1 \}$.

Donde $h(H)$ denota la longitud de Hirsch de H .

Lema 12

- Sean M una variedad de gráficas. Sea $H < \pi_1(M)$, entonces $H \in \mathcal{N}(\pi_1(M))$ si y sólo si, H es un subgrupo maximal de el estabilizador de un vértice v de T .

Propiedades de los estabilizadores de paredes

$\mathcal{N}(\pi_1(M)) = \{ H < \pi_1(M) \mid H \text{ es un subgrupo maximal nilpotente y } h(H) = n - 1 \}$.

Donde $h(H)$ denota la longitud de Hirsch de H .

Lema 12

- Sean M una variedad de gráficas. Sea $H < \pi_1(M)$, entonces $H \in \mathcal{N}(\pi_1(M))$ si y sólo si, H es un subgrupo maximal de el estabilizador de un vértice v de T .
- Sean M una variedad de gráficas. Sea $H < \pi_1(M)$, entonces, $H \in \mathcal{N}(\pi_1(M))$ si y sólo si H es un estabilizador de una pared.

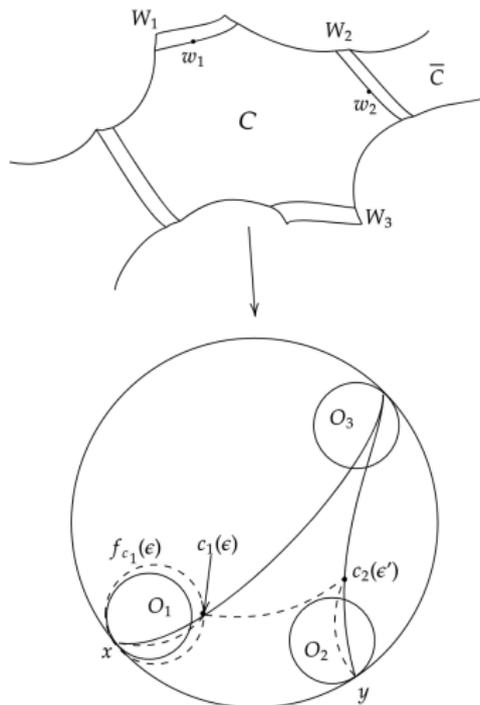


Figure: Construcción de la proyección de la trayectoria γ entre w_1 y w_2 .

Isomorfismos cuasi-preservan piezas que no son piezas de superficie

Proposición 13

Sea $f : \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$ una (k, c) -casi-isometría y sea g su casi-inversa. Supongamos que existe λ con la propiedad de que para cada pared W_1 de \tilde{M}_1 , existe una pared W_2 de \tilde{M}_2 con distancia de Hausdorff entre $f(W_1)$ y W_2 acotada por λ y que cambiando los papeles de W_1 con W_2 se cumple lo mismo para g . Entonces, existe una constante universal H , con la propiedad que para cada cámara C_1 en \tilde{M}_1 , existe una única cámara C_2 en \tilde{M}_2 tal que la distancia de Hausdorff entre $f(C_1)$ y C_2 está acotada por H .

Teorema A

Sean M_1, M_2 dos variedades de gráficas como las descritas en la definición 1. Sean $\Lambda_1 \leq \pi_1(M_1)$ un subgrupo conjugado al grupo fundamental de una pieza en M_1 y $\varphi : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$ un isomorfismo. Entonces $\varphi(\Lambda_1)$ es conjugado al grupo fundamental $\Lambda_2 \leq \pi_1(M_2)$ de una pieza en M_2 .

Prueba Teorema A

- $\Lambda_1 < \pi_1(M_1)$ el grupo fundamental de una pieza Z_1 de M_1 .

Prueba Teorema A

- $\Lambda_1 < \pi_1(M_1)$ el grupo fundamental de una pieza Z_1 de M_1 .
- Por la Proposición 13 y el Lema de Milnor-Svarc, $d(\varphi(\Lambda_1), g\Lambda_2g^{-1}) \leq L$, con $\Lambda_2 < \pi_1(M_2)$ grupo fundamental de una pieza de M_2 y $g \in \pi_1(M_2)$.

Prueba Teorema A

- $\Lambda_1 < \pi_1(M_1)$ el grupo fundamental de una pieza Z_1 de M_1 .
- Por la Proposición 13 y el Lema de Milnor-Svarc, $d(\varphi(\Lambda_1), g\Lambda_2g^{-1}) \leq L$, con $\Lambda_2 < \pi_1(M_2)$ grupo fundamental de una pieza de M_2 y $g \in \pi_1(M_2)$.
- Asumir que $g = id$.

Prueba Teorema A

- $\Lambda_1 < \pi_1(M_1)$ el grupo fundamental de una pieza Z_1 de M_1 .
- Por la Proposición 13 y el Lema de Milnor-Svarc, $d(\varphi(\Lambda_1), g\Lambda_2g^{-1}) \leq L$, con $\Lambda_2 < \pi_1(M_2)$ grupo fundamental de una pieza de M_2 y $g \in \pi_1(M_2)$.
- Asumir que $g = id$.
- Si $h \in \Lambda_1$, entonces

$$\varphi(h)\varphi(\Lambda_1) = \varphi(h\Lambda_1) = \varphi(\Lambda_1)$$

Prueba Teorema A

- $\Lambda_1 < \pi_1(M_1)$ el grupo fundamental de una pieza Z_1 de M_1 .
- Por la Proposición 13 y el Lema de Milnor-Svarc, $d(\varphi(\Lambda_1), g\Lambda_2g^{-1}) \leq L$, con $\Lambda_2 < \pi_1(M_2)$ grupo fundamental de una pieza de M_2 y $g \in \pi_1(M_2)$.
- Asumir que $g = id$.
- Si $h \in \Lambda_1$, entonces

$$\varphi(h)\varphi(\Lambda_1) = \varphi(h\Lambda_1) = \varphi(\Lambda_1)$$

- Como $\varphi(\Lambda_1)$ está a distancia acotada de Λ_2 , entonces $\varphi(h)\Lambda_2$ está a distancia acotada de Λ_2 .

Prueba Teorema A

- $\Lambda_1 < \pi_1(M_1)$ el grupo fundamental de una pieza Z_1 de M_1 .
- Por la Proposición 13 y el Lema de Milnor-Svarc, $d(\varphi(\Lambda_1), g\Lambda_2g^{-1}) \leq L$, con $\Lambda_2 < \pi_1(M_2)$ grupo fundamental de una pieza de M_2 y $g \in \pi_1(M_2)$.
- Asumir que $g = id$.
- Si $h \in \Lambda_1$, entonces

$$\varphi(h)\varphi(\Lambda_1) = \varphi(h\Lambda_1) = \varphi(\Lambda_1)$$

- Como $\varphi(\Lambda_1)$ está a distancia acotada de Λ_2 , entonces $\varphi(h)\Lambda_2$ está a distancia acotada de Λ_2 .
- Por el Lema de Milnor-Svarc, si C_2 es una cámara que es fijada por Λ_2 , entonces la cámara $\varphi(h)C_2$ está a distancia finita de C_2 .

Prueba Teorema A

- $\Lambda_1 < \pi_1(M_1)$ el grupo fundamental de una pieza Z_1 de M_1 .
- Por la Proposición 13 y el Lema de Milnor-Svarc, $d(\varphi(\Lambda_1), g\Lambda_2g^{-1}) \leq L$, con $\Lambda_2 < \pi_1(M_2)$ grupo fundamental de una pieza de M_2 y $g \in \pi_1(M_2)$.
- Asumir que $g = id$.
- Si $h \in \Lambda_1$, entonces

$$\varphi(h)\varphi(\Lambda_1) = \varphi(h\Lambda_1) = \varphi(\Lambda_1)$$

- Como $\varphi(\Lambda_1)$ está a distancia acotada de Λ_2 , entonces $\varphi(h)\Lambda_2$ está a distancia acotada de Λ_2 .
- Por el Lema de Milnor-Svarc, si C_2 es una cámara que es fijada por Λ_2 , entonces la cámara $\varphi(h)C_2$ está a distancia finita de C_2 .
- De donde $\varphi(h)C_2 = C_2$, así $\varphi(h) \in \Lambda_2$ y por lo tanto $\varphi(\Lambda_1) \subseteq \Lambda_2$.

Variedades con descomposiciones cuspidales

- Y variedad de curvatura negativa de dimensión $n \geq 3$, localmente simétrica, completa, volumen finito, no compacta, conexa.

Variedades con descomposiciones cuspidales

- Y variedad de curvatura negativa de dimensión $n \geq 3$, localmente simétrica, completa, volumen finito, no compacta, conexa.
- Y tiene una cantidad finita de cúspides y cada cúspide es difeomorfa a $[0, \infty) \times S$, donde S es una variedad compacta de dimensión $n - 1$.

Variedades con descomposiciones cuspidales

- Y variedad de curvatura negativa de dimensión $n \geq 3$, localmente simétrica, completa, volumen finito, no compacta, conexa.
- Y tiene una cantidad finita de cúspides y cada cúspide es difeomorfa a $[0, \infty) \times S$, donde S es una variedad compacta de dimensión $n - 1$.
- Borrar $(b, \infty) \times S$ de cada cúspide, para obtener una variedad compacta con frontera.

Variedades con descomposiciones cuspidales

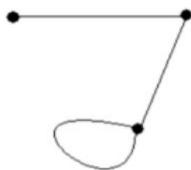
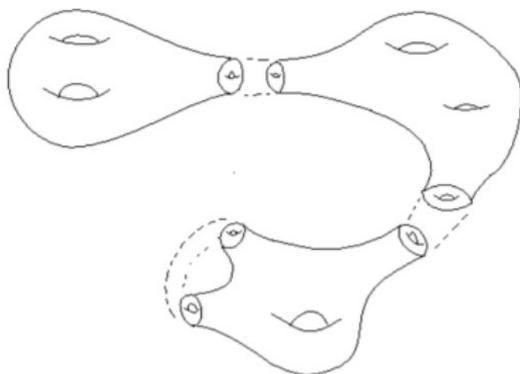
- Y variedad de curvatura negativa de dimensión $n \geq 3$, localmente simétrica, completa, volumen finito, no compacta, conexa.
- Y tiene una cantidad finita de cúspides y cada cúspide es difeomorfa a $[0, \infty) \times S$, donde S es una variedad compacta de dimensión $n - 1$.
- Borrar $(b, \infty) \times S$ de cada cúspide, para obtener una variedad compacta con frontera.
- Los componentes frontera de cada Y_i se levantan a horoesferas en \tilde{Y}_i .

Variedades con descomposiciones cuspidales

- Y variedad de curvatura negativa de dimensión $n \geq 3$, localmente simétrica, completa, volumen finito, no compacta, conexa.
- Y tiene una cantidad finita de cúspides y cada cúspide es difeomorfa a $[0, \infty) \times S$, donde S es una variedad compacta de dimensión $n - 1$.
- Borrar $(b, \infty) \times S$ de cada cúspide, para obtener una variedad compacta con frontera.
- Los componentes frontera de cada Y_i se levantan a horoesferas en \tilde{Y}_i .
- A estas variedades se les llama **variedades de cúspides acotadas con horofrontera**.

Definición 2 (Tam Nguyen Phan, CMH, 2012, [10])

Una **variedad** **Variedades con descomposiciones cuspidales** M , se obtiene por tomar una cantidad finita de las variedades Y_i e identificar sus fronteras por difeomorfismos afines.



Teorema B

Sea M una variedad que se descompone en cúspides. Entonces, la inclusión de cada pared y pieza inducen encajes cuasi-isométricos de sus grupos fundamentales en su imagen en $\pi_1(M)$.

- \tilde{M} tiene una estructura natural como árbol de espacios.
- Una *cámara* $C \in \tilde{M}$ es la preimagen de una componente conexa en \tilde{M} de Z sin la cúspide borrada $S \times (b, \infty)$.
- Una *pared* $W \in \tilde{M}$ es la preimagen de una componente conexa de $S \times [0, b]$.

- Para cada pared W de \tilde{M} , su frontera se descompone en dos componentes conexas a las que denotaremos por W_+ y W_- y las llamaremos **paredes delgadas** asociadas a W .

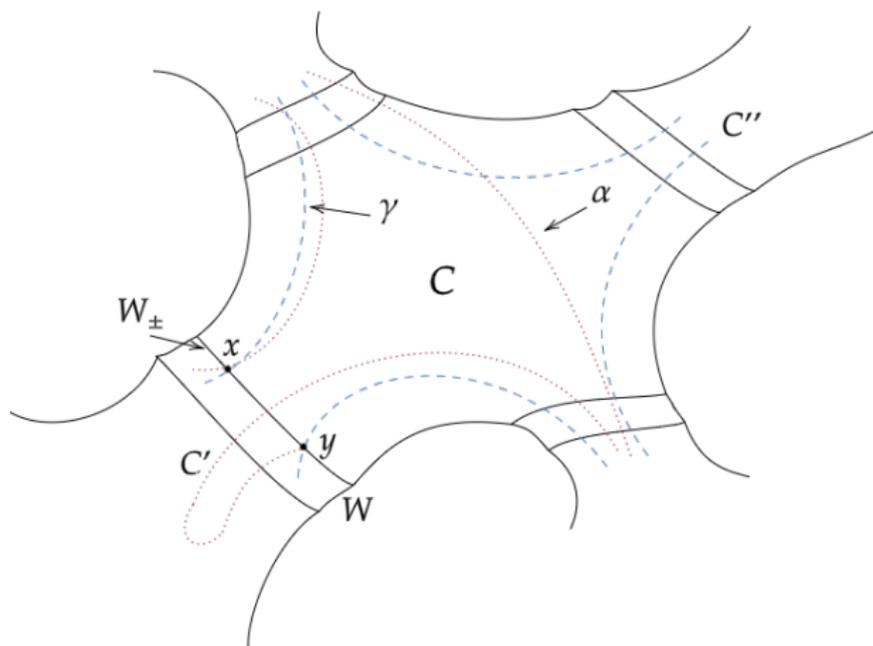
- Para cada pared W de \tilde{M} , su frontera se descompone en dos componentes conexas a las que denotaremos por W_+ y W_- y las llamaremos **paredes delgadas** asociadas a W .
- d_{\pm} es la métrica por trayectorias de W_{\pm} inducida por la restricción de la estructura riemanniana de \tilde{M} .

- Para cada pared W de \tilde{M} , su frontera se descompone en dos componentes conexas a las que denotaremos por W_+ y W_- y las llamaremos **paredes delgadas** asociadas a W .
- d_{\pm} es la métrica por trayectorias de W_{\pm} inducida por la restricción de la estructura riemanniana de \tilde{M} .

Lema 14

Sea W una pared en \tilde{M} . Si C es la cámara que contiene W_{\pm} , entonces la inclusión $(W_{\pm}, d_{W_{\pm}}) \hookrightarrow (C, d_C)$ es una isometría.

Se dice que γ es una *curva sin retroceso* en W_{\pm} si γ solo interseca en sus puntos finales a la pared que contiene a W_{\pm} .



Grupos Relativamente Hiperbólicos

- G grupo finitamente generado.

Grupos Relativamente Hiperbólicos

- G grupo finitamente generado.
- H subgrupo finitamente generado de G .

Grupos Relativamente Hiperbólicos

- G grupo finitamente generado.
- H subgrupo finitamente generado de G .
- Γ gráfica de Cayley de G .

Grupos Relativamente Hiperbólicos

- G grupo finitamente generado.
- H subgrupo finitamente generado de G .
- Γ gráfica de Cayley de G .
- $\hat{\Gamma}$ gráfica cociente de Γ por identificar para cada $g \in G$, todos los vértices de Γ que están en gH .

Grupos Relativamente Hiperbólicos

- G grupo finitamente generado.
- H subgrupo finitamente generado de G .
- Γ gráfica de Cayley de G .
- $\hat{\Gamma}$ gráfica cociente de Γ por identificar para cada $g \in G$, todos los vértices de Γ que están en gH .

Definición 3

El grupo G es hiperbólico relativo a H , si $\hat{\Gamma}$ es un espacio métrico de curvatura negativa.

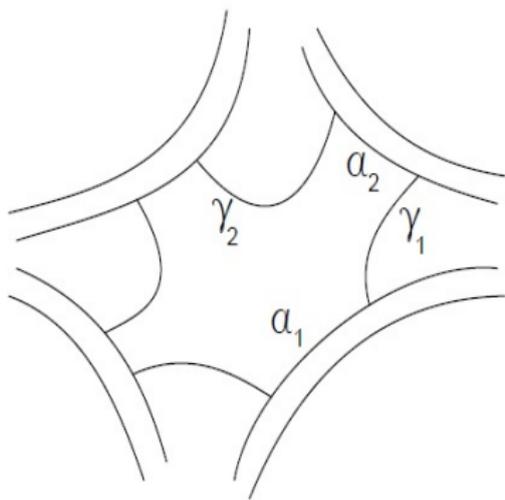


Figure: $\sum_{h \in D} L(\alpha_h) \leq Q \sum_{i=1}^n L(\gamma_i)$

- γ es una **curva sin retroceso** en W_{\pm} si γ solo interseca en sus puntos finales a la pared que contiene a W_{\pm} .

- γ es una **curva sin retroceso** en W_{\pm} si γ solo interseca en sus puntos finales a la pared que contiene a W_{\pm} .
- γ es **minimal**, si para cada cámara C , el conjunto $\gamma \cap \mathring{C}$ consiste de una colección finita de trayectorias y cada una de estas conecta distintas paredes de C .

- γ es una **curva sin retroceso** en W_{\pm} si γ solo interseca en sus puntos finales a la pared que contiene a W_{\pm} .
- γ es **minimal**, si para cada cámara C , el conjunto $\gamma \cap \mathring{C}$ consiste de una colección finita de trayectorias y cada una de estas conecta distintas paredes de C .
- γ es **buena** si es minimal y para cada pared delgada W_{\pm} contenida en C , hay a lo más dos puntos finales de trayectorias en $\gamma \cap \mathring{C}$ que pertenecen a W_{\pm} .

Proposición 15

Sean x, y puntos en la misma pared de \tilde{M} . Existe una constante $\beta \geq 1$ que depende solo de la geometría de \tilde{M} , tal que lo siguiente es cierto. Existe una trayectoria buena γ en \tilde{M} que conecta a x con y y tal que $L(\gamma) \leq \beta d(x, y)$.

- M^n variedad Riemanniana completa, de volumen finito, con curvatura negativa pinchada y una cúspide.

- M^n variedad Riemanniana completa, de volumen finito, con curvatura negativa pinchada y una cúspide.
- $\Gamma = \pi_1(M)$.

- M^n variedad Riemanniana completa, de volumen finito, con curvatura negativa pinchada y una cúspide.
- $\Gamma = \pi_1(M)$.
- Γ actúa libremente por isometrías en \tilde{M} con una órbita de puntos fijos parabólicos.

- M^n variedad Riemanniana completa, de volumen finito, con curvatura negativa pinchada y una cúspide.
- $\Gamma = \pi_1(M)$.
- Γ actúa libremente por isometrías en \tilde{M} con una órbita de puntos fijos parabólicos.
- O conjunto Γ -invariante de horoesferas centradas en los elementos parabólicos que corresponden a los levantamientos de las cúspides de M .

- M^n variedad Riemanniana completa, de volumen finito, con curvatura negativa pinchada y una cúspide.
- $\Gamma = \pi_1(M)$.
- Γ actúa libremente por isometrías en \tilde{M} con una órbita de puntos fijos parabólicos.
- O conjunto Γ -invariante de horoesferas centradas en los elementos parabólicos que corresponden a los levantamientos de las cúspides de M .
- X espacio obtenido por borrar el interior de las horobolas y por darle a este espacio resultante la métrica por trayectorias.

- M^n variedad Riemanniana completa, de volumen finito, con curvatura negativa pinchada y una cúspide.
- $\Gamma = \pi_1(M)$.
- Γ actúa libremente por isometrías en \tilde{M} con una órbita de puntos fijos parabólicos.
- O conjunto Γ -invariante de horoesferas centradas en los elementos parabólicos que corresponden a los levantamientos de las cúspides de M .
- X espacio obtenido por borrar el interior de las horobolas y por darle a este espacio resultante la métrica por trayectorias.
- Γ actúa libre y cocompactamente en X .

- M^n variedad Riemanniana completa, de volumen finito, con curvatura negativa pinchada y una cúspide.
- $\Gamma = \pi_1(M)$.
- Γ actúa libremente por isometrías en \tilde{M} con una órbita de puntos fijos parabólicos.
- O conjunto Γ -invariante de horoesferas centradas en los elementos parabólicos que corresponden a los levantamientos de las cúspides de M .
- X espacio obtenido por borrar el interior de las horobolas y por darle a este espacio resultante la métrica por trayectorias.
- Γ actúa libre y cocompactamente en X .
- $\gamma \mapsto \gamma \cdot x$, con $x \in X$ es una cuasi-isometría de Γ con X .

- M^n variedad Riemanniana completa, de volumen finito, con curvatura negativa pinchada y una cúspide.
- $\Gamma = \pi_1(M)$.
- Γ actúa libremente por isometrías en \tilde{M} con una órbita de puntos fijos parabólicos.
- O conjunto Γ -invariante de horoesferas centradas en los elementos parabólicos que corresponden a los levantamientos de las cúspides de M .
- X espacio obtenido por borrar el interior de las horobolas y por darle a este espacio resultante la métrica por trayectorias.
- Γ actúa libre y cocompactamente en X .
- $\gamma \mapsto \gamma \cdot x$, con $x \in X$ es una cuasi-isometría de Γ con X .
- Cada clase lateral distinta gH , $H \subset \Gamma$, pertenece a una única horoesfera.

Definición 4

El **espacio eléctrico** \widehat{X} es el espacio cociente obtenido por identificar puntos dentro de la misma componente horoesférica. Como cociente, \widehat{X} tiene una pseudo-métrica por trayectorias $d_{\widehat{X}}$ inducida por la métrica por trayectorias de X . Localmente, $d_{\widehat{X}}$ coincide con $d_{\widetilde{M}}$ fuera de las horoesferas.

Proposición 16

Sean x, y puntos en la misma pared de \tilde{M} . Existe una constante $\beta \geq 1$ que depende solo de la geometría de \tilde{M} , tal que lo siguiente es cierto. Existe una trayectoria buena γ en \tilde{M} que conecta a x con y y tal que $L(\gamma) \leq \beta d(x, y)$.

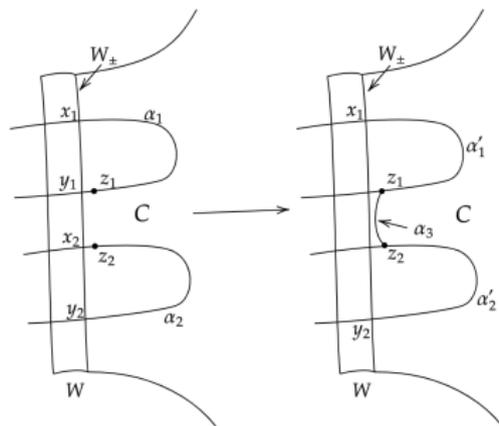


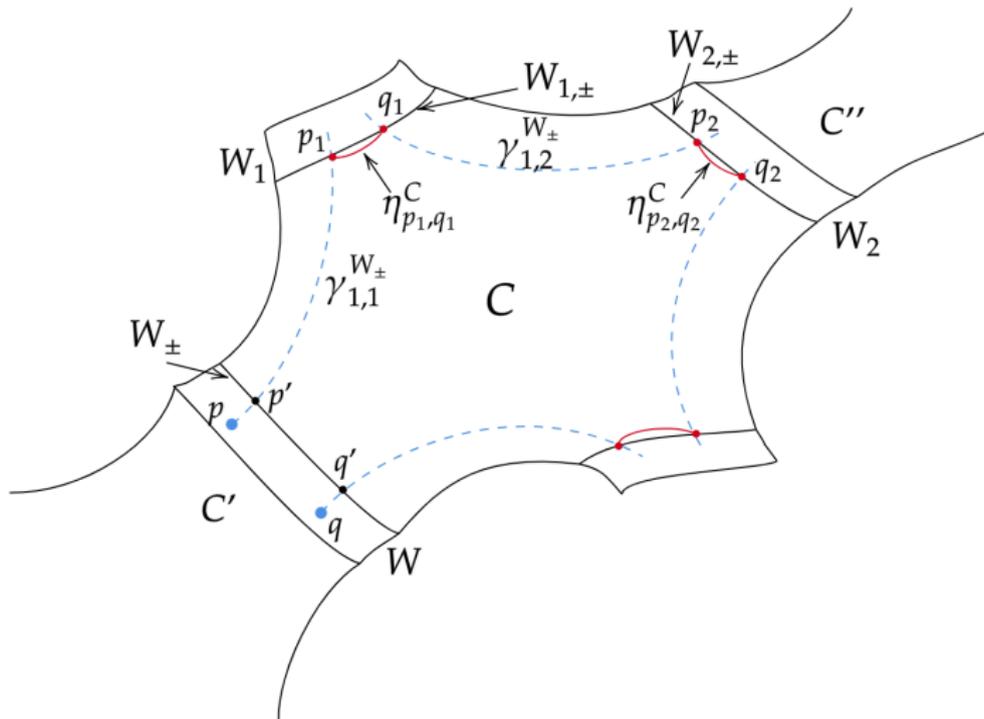
Figure: Construcción de una trayectoria buena entre los puntos x_1 y y_2 que pasa por los puntos z_1 y z_2

Lema 17

Sea $W \subseteq \tilde{M}$ una pared fija y supongamos que existe $\alpha \geq 1$ tal que lo siguiente es cierto: si $x, y \in W_{\pm}$ son puntos que se pueden unir con una trayectoria buena γ en \tilde{M} la cual no tiene retroceso en W_{\pm} , entonces

$$d_C(x, y) \leq \alpha \cdot L(\gamma).$$

Donde C es la cámara que contiene a x, y .



Teorema 18

Sea M una variedad como la descrita en la Definición 2 y sea $W \subseteq \tilde{M}$ una pared. Entonces, la inclusión $(W, d_W) \hookrightarrow \tilde{M}$ es un encaje bi-Lipschitz. En particular, es un encaje cuasi-isométrico. Más aún, la constante bi-Lipschitz del encaje solo depende de la geometría de \tilde{M} .

Corolario 19

Sea M una variedad como la descrita en la Definición 2, entonces la inclusión de una cámara en \tilde{M} es un encaje bi-Lipschitz.

Corolario 19

Sea M una variedad como la descrita en la Definición 2, entonces la inclusión de una cámara en \tilde{M} es un encaje bi-Lipschitz.

Corolario 20

Sea M una variedad que se descompone en cúspides. Entonces, la inclusión de cámaras y paredes (con su métrica por trayectorias) en \tilde{M} inducen encajes cuasi-isométricos.

Esbozo de la prueba del Teorema B

- $C, W \hookrightarrow \tilde{M}$ son encajes isométricos.

Esbozo de la prueba del Teorema B

- $C, W \hookrightarrow \tilde{M}$ son encajes isométricos.
- Por la Proposición 16 y el Lema 17 tenemos que $C, W \hookrightarrow \tilde{M}$ son encajes bi-Lipschitz.

Esbozo de la prueba del Teorema B

- $C, W \hookrightarrow \tilde{M}$ son encajes isométricos.
- Por la Proposición 16 y el Lema 17 tenemos que $C, W \hookrightarrow \tilde{M}$ son encajes bi-Lipschitz.
- Las paredes y cámaras se encajan cuasi-isométricamente en \tilde{M} .

Esbozo de la prueba del Teorema B

- $C, W \hookrightarrow \tilde{M}$ son encajes isométricos.
- Por la Proposición 16 y el Lema 17 tenemos que $C, W \hookrightarrow \tilde{M}$ son encajes bi-Lipschitz.
- Las paredes y cámaras se encajan cuasi-isométricamente en \tilde{M} .
- Por lo tanto, usando el Lema de Milnor-Svarc tenemos que a nivel de grupos fundamentales, las piezas y paredes se encajan cuasi-isométricamente en $\pi_1(M)$. □

¿Qué sigue?

¿Es posible generalizar este resultado para las variedades de gráficas?

Acilindricidad

- La acción de $\pi_1(\mathcal{G})$ es K -acilíndrica si existe una constante K tal que cualquier elemento que fija punto a punto una trayectoria en T de longitud $\geq K$ es trivial. Se dice que la acción es acilíndrica si es K -acilíndrica para alguna $K \geq 0$.
- Como consecuencia de

Lema 21

Sean W_1, W_2 paredes distintas de \tilde{M} , y sea $v \in V(T)$ de tal forma que cualquier trayectoria que conecta a W_1 con W_2 interseca a la cámara correspondiente a v . Si $g \in \pi_1(M)$ es tal que $g(W_i) = W_i$ para $i = 1, 2$. Entonces, g es un elemento que pertenece a la parte de la fibra de $\pi_1(M)$.

es posible probar que si M es una variedad de gráficas de dimensión superior, entonces la acción del $\pi_1(M)$ en el árbol de Bass-Serre T es 2-acilíndrica.

- ¿Y para variedades con descomposiciones cuspidales?

¿Entropía?

Sea G un grupo con un conjunto finito de generadores S . Denotemos por $|S^n|$ la cardinalidad de la bola de radio n con centro en la identidad con respecto a la métrica de la palabra en S . La *entropía* de G con respecto a S se define como:

$$Ent(G, S) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |S^n|$$

¿Cómo se relaciona la acilindricidad con la entropía?

Muchas gracias

Referencias

-  BÁRCENAS, N., JUAN-PINEDA, D., & SUÁREZ-SERRATO, P. (2017). *Topological rigidity of higher graph manifolds*. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 23(1), 119-127.
-  CEROCCHI, F., & SAMBUSETTI, A. *Entropy and finiteness of groups with acylindrical splittings*, arXiv:1711.06210.
-  CEROCCHI, F., & SAMBUSETTI, A. *Local topological rigidity of nongeometric 3-manifolds*. Geometry & Topology, 23(6), 2899–2927 (2019).
-  EBERLEIN, P. (1980). *Lattices in spaces of nonpositive curvature*. Annals of Mathematics, 111(3), 435-476.
-  FARB, B. (1998). *Relatively hyperbolic groups*. Geometric and functional analysis, 8(5), 810-840.
-  FRIGERIO, R., LAFONT, J. F., & SISTO, A. (2015). *Rigidity of high dimensional graph manifolds*. Astérisque, 372.
-  DE LA HARPE, PIERRE AND BUCHER, M.(2000). *Free products with amalgamation and HNN-extensions of uniformly exponential growth*. Math. Notes, 67(6), 686–689.
-  HEINTZE, E., & IM HOF, H. C. (1977). *Geometry of horospheres*. Journal of Differential geometry, 12(4), 481-491.
-  SERRE, J. P. (1980). *Trees Translated from the French by John Stillwell*. Springer.
-  TÂM NGUYÊN PHAN, T (2012). *Smooth (non) rigidity of cusp-decomposable manifolds*. Commentarii Mathematici Helvetici, 87, 789-804.