

Una representación de Burau para trenzas planas y su polinomio de Alexander

Christopher Jonatan Roque Márquez

(coautores: Bruno Cisneros, Marcelo Flores y Jesús Juyumaya)

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

Séptimas Jornadas de Geometría, Topología y Dinámica
17 de diciembre 2021



CENTRO DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

Outline

Mundo Plano

Doodles

Trenzas planas (twins)

Invariante

Representación

Funciones f_n

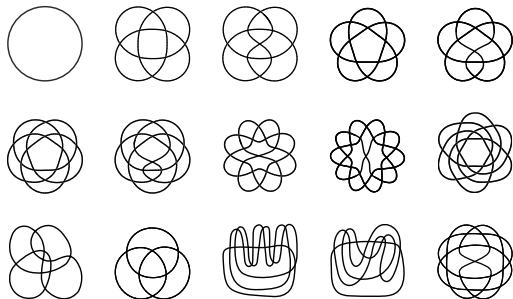
Invariante Q

Burau - Alexander

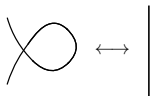
Relación con álgebras de Hecke

Doodles

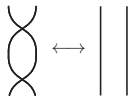
Un *doodle* es una colección finita de curvas cerradas en la esfera sin triples intersecciones.



Equivalencia



(a) R1

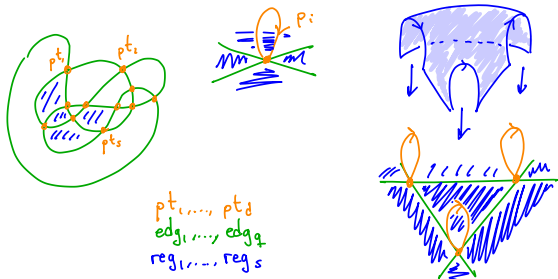


(b) R2



(c) R3

Hay un análogo al grupo del nudo, el llamado *doodle group*, definido por Khovanov. Dado un doodle D se le asocia un CW-complejo $X(D)$



Se cumple que si $D \sim D'$, entonces $X(D) \simeq X(D')$ y $\pi_1(X(D))$ es el grupo asociado.

Teorema (Khovanov '97)

Siempre existe un único representante mínimo para todo doodle.

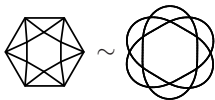
Teorema (Bartholomew-Fenn-Kamada-Kamada '18)

Considera un doodle mínimo no trivial

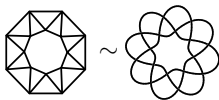
- al menos tiene 6 cruces
- solo hay uno con 6 cruces: Borromeano
- no hay con 7 cruces
- solo hay uno con 8 cruces: 4-poppy



Hay métodos para construir doodles a partir de polígonos



(a) 6-Borromeano



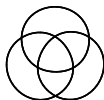
(b) 8-poppy

Doodles y Poliedros

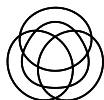
Teorema (P. Cromwell)

Hay una biyección entre representantes mínimos de doodles y el 1-esqueleto de poliedros en 3 dimensiones cuyos vértices tienen valencia cuatro.

Ejemplos



octaedro



cuboctaedro



sólido de Johnson J_{27}

En teoría de nudos existe una contraparte algebraica de los nudos y enlaces que son los grupos de trenzas B_n .

Pregunta

¿Cómo sería una contraparte algebraica de los doodles?

Outline

Mundo Plano

Doodles

Trenzas planas (twins)

Invariante

Representación

Funciones f_n

Invariante Q

Burau - Alexander

Relación con álgebras de Hecke

Trenzas planas

Definamos T_n como el grupo con presentación

$$T_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i^2 = 1 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n-1 \\ |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle$$

Este grupo ya ha aparecido en la literatura con distintos nombres

- grupo cartográfico de Grothendieck (Voevodsky)
- grupo simétrico cuántico (Gerstenhaber-Giaquinto-Schack)
- twin group (Khovanov)
- grupo de trenzas plano (Merkov)
- traid group (Harshmann-Knapp)

Trenzas planas

Definamos T_n como el grupo con presentación

$$\Sigma_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i^2 = 1 & 1 \leq i \leq n-1 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2 \end{array} \right\rangle$$

Este grupo ya ha aparecido en la literatura con distintos nombres

- grupo cartográfico de Grothendieck (Voevodsky)
- grupo simétrico cuántico (Gerstenhaber-Giaquinto-Schack)
- twin group (Khovanov)
- grupo de trenzas plano (Merkov)
- traid group (Harshmann-Knapp)

Trenzas planas

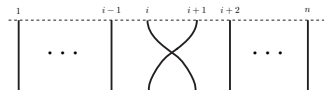
Definamos T_n como el grupo con presentación

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n - 2 \end{array} \right\rangle$$

Este grupo ya ha aparecido en la literatura con distintos nombres

- grupo cartográfico de Grothendieck (Voevodsky)
- grupo simétrico cuántico (Gerstenhaber-Giaquinto-Schack)
- twin group (Khovanov)
- grupo de trenzas plano (Merkov)
- traid group (Harshmann-Knapp)

Khovanov da una representación geométrica a los elem. de T_n , donde el generador σ_i se representa con la trenza plana



y por lo que las relaciones tienen la forma

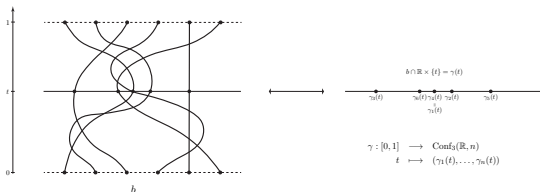


Hay un homomorfismo natural de T_n al grupo simétrico tal que tenemos la SEC

$$1 \rightarrow PT_n \rightarrow T_n \rightarrow \Sigma_n \rightarrow 1$$

donde PT_n se le llama el *grupo de trenzas planas puras*.

PT_n es un grupo interesante. Tiene muchas similitudes al grupo de trenzas puras P_n



$$\text{Conf}_k(\mathbb{R}, n) := \mathbb{R}^n \setminus \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = x_j = x_k \text{ con } i, j, k \text{ distintos}\}$$

- su $K(\pi, 1)$ de un 'espacio de configuraciones'
- es libre de torsión
- es residualmente nilpotente
- se descompone en productos semidirectos
- es un grupo de diagramas
- es un grupo CAT(0) *Daniel Farley*

El grupo de trenzas planas T_n es un buen candidato a ser la contraparte algebraica de los doodles.

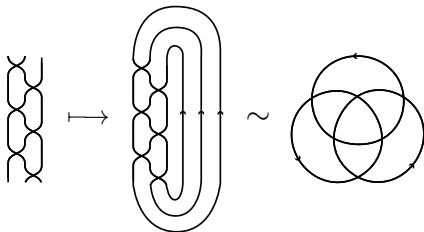


Figura: doodle Borromeano como la cerradura $\widehat{(\sigma_1\sigma_2)^3}$

Teorema de Alexander¹ (Khovanov '97)

Todo doodle es cerradura de un twin.

¹Video teo. de Alexander para nudos aquí

Teorema de Markov (Gotin '18)

Dos twins γ, γ' tienen cerraduras equivalentes como doodles ssi γ se puede transformar en γ' por los sigs movimientos:

$$M0 : \iota^R(\beta) \sim \iota^L(\beta),$$

$$M1 : \beta \sim \alpha^{-1}\beta\alpha,$$

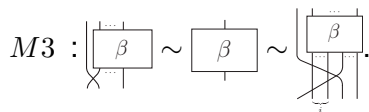
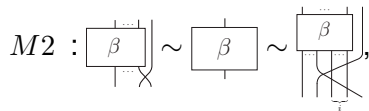
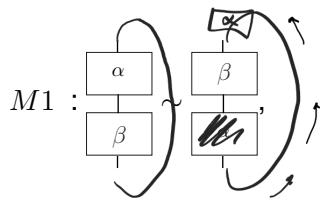
$$M2 : \beta \sim \iota^R(\beta)\sigma_n \cdots \sigma_{n-i} \cdots \sigma_n \text{ para } 0 \leq i \leq n-1,$$

$$M3 : \beta \sim \iota^L(\beta)\sigma_1 \cdots \sigma_{i+1} \cdots \sigma_1 \text{ para } 0 \leq i \leq n-1.$$

con $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_n$.

Lo mismo... pero en dibujos

$$M0 : \left[\begin{array}{c} \dots \\ \beta \\ \dots \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c} \dots \\ \beta \\ \dots \end{array} \right],$$

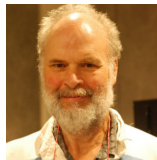


Denotemos \mathcal{D} el conjunto de doodles. Si T_∞ es el límite inductivo de $\{t_n^R : T_n \hookrightarrow T_{n+1}\}_{n=1}^\infty$, los teoremas de Alexander y Markov implican la biyección

$$\frac{\mathcal{D}}{\text{R-moves}} \longleftrightarrow \frac{T_\infty}{\text{GM-moves}}.$$

Esto nos permite a buscar invariantes de doodles a través de los grupos de trenzas planas, i.e., encontrar funciones $f = \{f_n : T_n \rightarrow \mathcal{S}\}_{n \geq 1}$, donde \mathcal{S} es un conjunto conocido y las funciones f_n sean compatibles bajo los movimientos de Gotin-Markov.

Esta es una idea que se explotó mucho en teoría de nudos a partir del trabajo de Vaughan Jones.



Outline

Mundo Plano

Doodles

Trenzas planas (twins)

Invariante

Representación

Funciones f_n

Invariante Q

Burau - Alexander

Relación con álgebras de Hecke

Observación importante

Muchos de los invariantes polinomiales de nudos pueden definirse a través de la deformación de objetos algebraicos.


- pol. de Alexander (p. ej. representación de Burau)
- pol. de HOMFLYPT (p. ej. álgebra de Hecke)
- pol. de Jones (p. ej. álgebra Temperley-Lieb)
- pol. de Kauffman (p. ej. álgebra BMW)
- en general, todos los invariantes cuánticos (grupos cuánticos)

Aplicaremos la misma idea a nuestro caso.

Representación de Tits

Definición

Sea $M = (m_{i,j})_{r \times r}$ con $m_{i,j} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m_{i,j} = m_{j,i}$, y $m_{i,i} = 1$.
El grupo de Coxeter asociado a M es el grupo

$$W(M) = \langle s_1, \dots, s_r \mid (s_i s_j)^{m_{i,j}} = 1 \text{ para } m_{i,j} \neq \infty \rangle.$$


Sea $V = \mathbb{R}^r$ con base $\{e_i\}_{i=1}^r$ y B_M la forma bilineal en V

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi}{m_{i,j}}\right) & \text{if } m_{i,j} \neq \infty, \\ -1 & \text{if } m_{i,j} = \infty. \end{cases}$$

Teorema (Tits '61)

La asignación $\rho : W(M) \rightarrow GL(V)$ dada por $\rho(s_i) = \delta_i$, con $\delta_i(v) = v - 2B(e_i, v)e_i$ es una representación fiel de $W(M)$ y se le llama la *representación de Tits*.

Ejemplo: grupo de trenzas planas

$$T_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i^2 = 1 & 1 \leq i \leq n-1 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

El grupo de trenzas planas es un grupo de Coxeter con $m_{i,j} = 2$ para $|i-j| \geq 2$ y $m_{i,i+1} = \infty$ para $1 \leq i \leq n-2$.
Entonces

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } |i-j| \geq 2, \\ -1 & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

La representación de Tits es $\rho : T_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{R})$

$$\delta_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad \delta_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} I_{i-2} & & & 0 & & \\ & 1 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & & & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad \delta_{n-1} = \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & I_{n-3} & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Ejemplo: grupo de trenzas planas

$$T_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i^2 = 1 & 1 \leq i \leq n-1 \\ (\sigma_i \sigma_j)^2 = 1 & |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

El grupo de trenzas planas es un grupo de Coxeter con $m_{i,j} = 2$ para $|i-j| \geq 2$ y $m_{i,i+1} = \infty$ para $1 \leq i \leq n-2$.
Entonces

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } |i-j| \geq 2, \\ -1 & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

La representación de Tits es $\rho : T_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{R})$

$$\delta_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad \delta_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} I_{i-2} & & & 0 & & \\ & 1 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & & & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad \delta_{n-1} = \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 2 & -1 \\ \hline 0 & & & & \end{array} \right).$$

Ejemplo: grupo de trenzas planas

$$T_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i^2 = 1 & 1 \leq i \leq n-1 \\ (\sigma_i \sigma_j)^2 = 1 & |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

El grupo de trenzas planas es un grupo de Coxeter con $m_{i,j} = 2$ para $|i-j| \geq 2$ y $m_{i,i+1} = \infty$ para $1 \leq i \leq n-2$.
Entonces

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } |i-j| \geq 2, \\ -1 & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

La representación de Tits es $\rho : T_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{R})$

$$\delta_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad \delta_i = \left(\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-2} & 0 & & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad \delta_{n-1} = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{n-3} & 0 & & \\ \hline & 1 & 0 & \\ 0 & 2 & -1 & \\ \hline & & & \end{array} \right).$$

Ejemplo: grupo de trenzas planas

$$T_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i^2 = 1 & 1 \leq i \leq n-1 \\ (\sigma_i \sigma_j)^2 = 1 & |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

El grupo de trenzas planas es un grupo de Coxeter con $m_{i,j} = 2$ para $|i-j| \geq 2$ y $m_{i,i+1} = \infty$ para $1 \leq i \leq n-2$.
Entonces

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } |i-j| \geq 2, \\ -1 & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

La representación de Tits es $\rho : T_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z})$

$$\delta_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad \delta_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} I_{i-2} & & & 0 & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad \delta_{n-1} = \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & I_{n-3} & 0 \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Consideremos un parámetro x y las matrices

$$V_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & x & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad V_i = \left(\begin{array}{ccc|cc} I_{i-2} & & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & x & -1 & x & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad V_{n-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{n-3} & & 0 & & \\ & 1 & 0 & & \\ \hline 0 & & & 1 & 0 \\ & x & -1 & & \end{array} \right).$$

Proposición

$$\begin{aligned} \psi_n : T_n &\rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}(x)) && \text{es un homomorfismo.} \\ \sigma_i &\mapsto V_i \end{aligned}$$

Observación: para $x = 2$ obtenemos la representación de Tits del grupo de trenzas planas.

$$\delta_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad \delta_i = \left(\begin{array}{ccc|cc} I_{i-2} & & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad \delta_{n-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{n-3} & & 0 & & \\ & 1 & 0 & & \\ \hline 0 & & & 1 & 0 \\ & 2 & -1 & & \end{array} \right).$$

Consideremos un parámetro x y las matrices

$$V_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & x & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad V_i = \left(\begin{array}{ccc|cc} I_{i-2} & & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & x & -1 & x & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad V_{n-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{n-3} & & 0 & & \\ & 1 & 0 & & \\ \hline 0 & & & 1 & 0 \\ & & & x & -1 \end{array} \right).$$

Proposición

$$\begin{aligned} \psi_n : T_n &\rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}(x)) && \text{es un homomorfismo.} \\ \sigma_i &\mapsto V_i \end{aligned}$$

Observación: para $x = 2$ obtenemos la representación de Tits del grupo de trenzas planas.

$$\delta_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad \delta_i = \left(\begin{array}{ccc|cc} I_{i-2} & & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad \delta_{n-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{n-3} & & 0 & & \\ & 1 & 0 & & \\ \hline 0 & & & 1 & 0 \\ & & & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Consideremos un parámetro x y las matrices

$$V_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & x & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad V_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} I_{i-2} & & & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & & \\ & 0 & x & -1 & x & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad V_{n-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{n-3} & & 0 & \\ & & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & x & -1 \end{array} \right).$$

Proposición

$$\begin{aligned} \psi_n : T_n &\rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}(x)) && \text{es un homomorfismo.} \\ \sigma_i &\mapsto V_i \end{aligned}$$

Observación: para $x = 1$ obtenemos la representación de Tits del grupo simétrico.

$$\delta_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad \delta_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} I_{i-2} & & & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad \delta_{n-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{n-3} & & 0 & \\ & & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Propiedades

$$1. \psi_{n+1} \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \boxed{\beta} \\ \vdots \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \psi_n \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \boxed{\beta} \\ \vdots \end{array} \right) & 0 \\ v^R(\beta) & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \psi_{n+1} \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \boxed{\beta} \\ \vdots \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & v^L(\beta) \\ 0 & \psi_n \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \boxed{\beta} \\ \vdots \end{array} \right) \end{pmatrix}$$

donde $v^R(\beta)$ y $v^L(\beta)$ son renglones de longitud $n - 1$ con entradas en $\mathbb{Z}(x)$ que dependen de β .

Propiedades

Se puede encontrar un vector fijo para $\psi_{n+1} \left(\begin{array}{c|c} \dots & \\ \hline \beta & \\ \hline \dots & \end{array} \right)$

$$X \begin{pmatrix} \psi_n(\beta) & 0 \\ v^R(\beta) & 1 \end{pmatrix} = X$$

La solución está en términos de los polinomios de Chebyshev de segundo tipo: $X = (U_0 \left(\frac{1}{x} \right), \dots, U_{n-1} \left(\frac{1}{x} \right))$.

Lema

Sea $\beta \in T_n$ y a_i el i -ésimo renglón de $\psi_n(\beta) - I_{n-1}$ para $1 \leq i \leq n-1$. Entonces

$$-U_{n-1} \left(\frac{1}{x} \right) v^R(\beta) = \sum_{i=1}^{n-1} U_{i-1} \left(\frac{1}{x} \right) a_i,$$

donde $U_i(z)$ es el i -ésimo polinomio de Chebyshev de segundo tipo.

Propiedades

Se puede encontrar un vector fijo para $\psi_{n+1} \left(\begin{array}{c|c} \dots & \\ \hline & \beta \\ \hline \dots & \end{array} \right)$

$$X \begin{pmatrix} \psi_n(\beta) - I_{n-1} & 0 \\ v^R(\beta) & 0 \end{pmatrix} = 0$$

La solución está en términos de los polinomios de Chebyshev de segundo tipo: $X = (U_0(\frac{1}{x}), \dots, U_{n-1}(\frac{1}{x}))$.

Lema

Sea $\beta \in T_n$ y a_i el i -ésimo renglón de $\psi_n(\beta) - I_{n-1}$ para $1 \leq i \leq n-1$. Entonces

$$-U_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) v^R(\beta) = \sum_{i=1}^{n-1} U_{i-1}\left(\frac{1}{x}\right) a_i,$$

donde $U_i(z)$ es el i -ésimo polinomio de Chebyshev de segundo tipo.

Propiedades

Se puede encontrar un vector fijo para $\psi_{n+1} \left(\begin{array}{c} \dots \\ \beta \\ \dots \end{array} \right)$

$$X \begin{pmatrix} \psi_n(\beta) - I_{n-1} & 0 \\ v^R(\beta) & 0 \end{pmatrix} = 0$$

La solución está en términos de los **polinomios de Chebyshev de segundo tipo**: $X = (U_0 \left(\frac{1}{x} \right), \dots, U_{n-1} \left(\frac{1}{x} \right))$.

Lema

Sea $\beta \in T_n$ y a_i el i -ésimo renglón de $\psi_n(\beta) - I_{n-1}$ para $1 \leq i \leq n-1$. Entonces

$$-U_{n-1} \left(\frac{1}{x} \right) v^R(\beta) = \sum_{i=1}^{n-1} U_{i-1} \left(\frac{1}{x} \right) a_i,$$

donde $U_i(z)$ es el i -ésimo polinomio de Chebyshev de segundo tipo.

Propiedades

Se puede encontrar un vector fijo para $\psi_{n+1} \left(\begin{array}{c} \dots \\ \beta \\ \dots \end{array} \right)$

$$X \begin{pmatrix} \psi_n(\beta) - I_{n-1} & 0 \\ v^R(\beta) & 0 \end{pmatrix} = 0$$

La solución está en términos de los polinomios de Chebyshev de segundo tipo: $X = (U_0 \left(\frac{1}{x}\right), \dots, U_{n-1} \left(\frac{1}{x}\right))$.

Lema

Sea $\beta \in T_n$ y a_i el i -ésimo renglón de $\psi_n(\beta) - I_{n-1}$ para $1 \leq i \leq n-1$. Entonces

$$-U_{n-1} \left(\frac{1}{x}\right) v^R(\beta) = \sum_{i=1}^{n-1} U_{i-1} \left(\frac{1}{x}\right) a_i,$$

donde $U_i(z)$ es el i -ésimo polinomio de Chebyshev de segundo tipo.

Polinomios de Chebyshev

Definición

El n -ésimo *polinomio de Chebyshev de segundo tipo* $U_n(z)$ es el polinomio de grado n en una variable z definido por la regla de recurrencia

$$U_n(z) = 2zU_{n-1}(z) - U_{n-2}(z),$$

y condiciones iniciales

$$U_0(z) = 1 \quad \text{y} \quad U_1(z) = 2z.$$

Outline

Mundo Plano

Doodles

Trenzas planas (twins)

Invariante

Representación

Funciones f_n

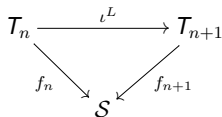
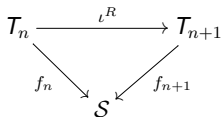
Invariante Q

Burau - Alexander

Relación con álgebras de Hecke

Función de Markov

Una *función de Markov* es una colección $f = \{f_n : T_n \rightarrow \mathcal{S}\}_{n \geq 1}$ compatible bajo los movimientos de Gotin-Markov.



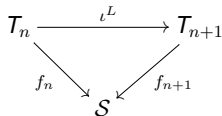
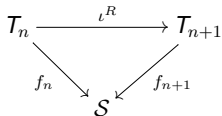
Definición

Sea $f_n : T_n \rightarrow \mathbb{Z}(x)$ definida por

$$f_n(\beta) := \frac{\det(\psi_n(\beta) - I_{n-1})}{(-x)^{n-1} U_{n-1} \left(\frac{1}{x} \right)}$$

Función de Markov

Una *función de Markov* es una colección $f = \{f_n : T_n \rightarrow \mathcal{S}\}_{n \geq 1}$ compatible bajo los movimientos de Gotin-Markov.



Definición

Sea $f_n : T_n \rightarrow \mathbb{Z}(x)$ definida por

$$f_n(\beta) := \frac{\det(\psi_n(\beta) - I_{n-1})}{(-x)^{n-1} \mathbf{U}_{n-1} \left(\frac{1}{x} \right)}$$

Propiedades de f_n

$$I) f_{n+1}(\boxed{\beta}) = 0 = f_{n+1}(\boxed{\beta}),$$

$$II) f_n \left(\begin{array}{c} \boxed{\alpha} \\ | \\ \boxed{\beta} \end{array} \right) = f_n \left(\begin{array}{c} \boxed{\beta} \\ | \\ \boxed{\alpha} \end{array} \right),$$

$$III) f_{n+1}(\boxed{\beta}) = f_n(\boxed{\beta}) = f_{n+1}(\boxed{\beta}),$$

$$IV) f_{n+1}(\boxed{\beta}) = x^{2i} f_n(\boxed{\beta}) = f_{n+1}(\boxed{\beta}),$$

$$V) f_n(\text{diagram}) - f_n(\text{diagram}) = \underline{(x^2 - 1)} (f_n(\text{diagram}) - f_n(\text{diagram})),$$

para toda $\alpha, \beta \in T_n$.

Outline

Mundo Plano

Doodles

Trenzas planas (twins)

Invariante

Representación

Funciones f_n

Invarinte Q

Burau - Alexander

Relación con álgebras de Hecke

Invariante Q

De las propiedades se sigue que si $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ como doodles, entonces $f_n(\alpha) = \underline{x^{2k}} f_m(\beta)$.

De las propiedad (V) se sigue que $f_n(\gamma) \in \mathbb{Z}[x^2]$ para cualquier γ (y cualquier n).

Definición

Para $D \in \mathcal{D}$, definimos

$$Q(D) := f_n(\beta)$$

para cualquier twin β con $\hat{\beta} \sim D$ como doodle.

TEOREMA (Cisneros-Flores-Juyumaya-R. '20)

La función Q es un invariante polinomial de doodles orientados.

Invariante Q

De las propiedades se sigue que si $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ como doodles, entonces $f_n(\alpha) = f_m(\beta)$.

De las propiedad (V) se sigue que $f_n(\gamma) \in \mathbb{Z}[x^2]$ para cualquier γ (y cualquier n).

Definición

Para $D \in \mathcal{D}$, definimos

$$Q(D) := f_n(\beta)$$

para cualquier twin β con $\hat{\beta} \sim D$ como doodle.

TEOREMA (Cisneros-Flores-Juyumaya-R. '20)

La función Q es un invariante polinomial de doodles orientados.

Invariante Q

De las propiedades se sigue que si $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ como doodles, entonces $f_n(\alpha) = f_m(\beta)$.

De las propiedad (V) se sigue que $f_n(\gamma) \in \mathbb{Z}[x^2]$ para cualquier γ (y cualquier n).

Definición

Para $D \in \mathcal{D}$, definimos

$$Q(D) := f_n(\beta)$$

para cualquier twin β con $\hat{\beta} \sim D$ como doodle.

TEOREMA (Cisneros-Flores-Juyumaya-R. '20)

La función Q es un invariante polinomial de doodles orientados.

Invariante \mathcal{Q}

De las propiedades se sigue que si $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ como doodles, entonces $f_n(\alpha) \doteq f_m(\beta)$.

De las propiedad (V) se sigue que $f_n(\gamma) \in \mathbb{Z}[x^2]$ para cualquier γ (y cualquier n).

Definición

Para $D \in \mathcal{D}$, definimos

$$\mathcal{Q}(D) := \gcd\langle f_n(\beta) \mid \hat{\beta} \sim D \rangle$$

TEOREMA (Cisneros-Flores-Juyumaya-R. '20)

La función \mathcal{Q} es un invariante polinomial de doodles orientados.

Invariante \mathcal{Q}

De las propiedades se sigue que si $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ como doodles, entonces $f_n(\alpha) \doteq f_m(\beta)$.

De las propiedad (V) se sigue que $f_n(\gamma) \in \mathbb{Z}[x^2]$ para cualquier γ (y cualquier n).

Definición

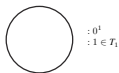
Para $D \in \mathcal{D}$, definimos

$$\mathcal{Q}(D) := \gcd\langle f_n(\beta) \mid \hat{\beta} \sim D \rangle$$

TEOREMA (Cisneros-Flores-Juyumaya-R. '20)

La función \mathcal{Q} es un invariante polinomial de doodles orientados.

Ejemplos de cálculos



$$: 0^1$$

$$: 1 \in \mathcal{R}_1$$

$$: \{0\}(1)$$



$$: 8^1$$

$$: (12)^4$$

$$: \{3\}(1, -4, 4)$$



$$: 9^1$$

$$: (321)^3$$

$$: \{2\}(4, -4, 1)$$



$$: 10^1$$

$$: (12)^5$$

$$: \{4\}(1, -6, 11, -6, 1)$$



$$: 11^1$$

$$: (21)^2(23)^2 123$$

$$: \{4\}(1, -2, 3, -2, 1)$$



$$: 14^1$$

$$: (12)^7$$

$$: \{6\}(1, -10, 37, -62, 46, -12, 1)$$



$$: 15^1$$

$$: 54321(432)^2 54321$$

$$: 2(43)^2$$

$$: \{7\}(1, 2, -1, -2, 1)$$



$$: 15^1$$

$$: (12)^3 321(32)^2$$

$$: \{6\}(1, -6, 13, -14, 10, -4, 1)$$



$$: 15^1$$

$$: (321)^5$$

$$: \{4\}(16, -48, 44, -12, 1)$$



$$: 16^1$$

$$: 321(3214)^2 32134$$

$$: \{5\}(1, 4, 0, -8, 4)$$



$$: 16^1$$

$$: (12)^8$$

$$: \{7\}(1, -12, 56, -128, 148, -80, 16)$$



$$: 17^1$$

$$: (43)^2 54321(43)^2$$

$$: (23)^2 543212$$

$$: \{9\}(1, -2, 1, 2, -2, 1)$$



$$: 17^1$$

$$: (12)^2 321(32)^2(12)^3$$

$$: \{7\}(1, -8, 24, -36, 32, -16, 4)$$



$$: 17^1$$

$$: 7654321(43)^2 2354$$

$$: 654765432143245$$

$$: 4346545$$

$$: \{14\}(1, -4, 4)$$



$$: 20^1$$

$$: (12)^{10}$$

$$: \{9\}(1, -16, 106, -376, 771, -920,$$

$$610, -200, 25)$$



$$: 21^1$$

$$: 1234356543212$$

$$: (543)^2 765432(43)^2$$

$$: 56765434$$

$$: \{14\}(1, 2, -2, 1, -2, 1)$$



$$: 21^1$$

$$: (12)^3 3213323(21)^2$$

$$: \{9\}(1, -12, 58, -148, 223, -212,$$

$$130, -48, 9)$$



$$: 21^1$$

$$: 543212(43)^2 54321$$

$$: (43)^2(23)^4$$

$$: \{11\}(1, -6, 11, -4, -7, 8, -1, -2, 1)$$



$$: 21^1$$

$$: 7654323(54)^2 654321$$

$$: 765432(43)^2 5654321$$

$$: 543$$

$$: \{12\}(4, -4, 1)$$



$$: 21^1$$

$$: (123)^7$$

$$: \{6\}(64, -320, 592, -496, 184, -24, 1)$$

Ejemplos de cálculos



: 22^1
: $(12)^{11}$

: $\{10\}(1, -18, 137, -574, 1444,$
 $-2232, 2083, -1106, 295, -30, 1)$



: 24^1
: $(1234)^6$

: $\{10\}(1, -24, 218, -960, 2251,$
 $-2880, 1962, -648, 81)$



: 26^1
: $(12)^{13}$

: $\{12\}(1, -22, 211, -1158, 4013,$
 $-9142, 13820, -13672, 8518, -3108,$
 $581, -42, 1)$



: 28^1
: $(12)^{14}$

: $\{13\}(1, -24, 254, -1560, 6157,$
 $-16336, 29618, -36568, 30086,$
 $-15792, 4900, -784, 49)$



: 10^2
: $(12)^2 321323$

: 0



: 18^2
: $(123)^6$

: 0



: 6^3
: $(12)^3$

: $\{2\}(1, -2, 1)$



: 12^3
: $(12)^6$

: $\{5\}(1, -8, 22, -24, 9)$



: 16^3
: 432312324321
: $(23)^4$

: $\{8\}(1, -6, 15, -20, 15, -6, 1)$



: 18^3
: $(12)^9$

: $\{8\}(1, -14, 79, -230, 367, -314,$
 $130, -20, 1)$



: 21^3
: $12343(23)^2 5(432)^2$
: 12343543234

: $\{11\}(1, -4, 4, 4, -10, 4, 4, -4, 1)$



: 24^3
: $(12)^{12}$

: $\{11\}(1, -20, 172, -832, 2486,$
 $-4744, 5776, -4532, 1897, -420, 36)$



: 12^4
: 543213432343
: 5432132343

: 0



: 12^4
: $(123)^4$

: 0



: 20^4
: $(13232)^4$

: 0



: 16^5
: 123432132123432
: 123

: 0

¿Por qué \mathcal{Q} es de tipo Alexander?

Una de muchas construcciones del polinomio de Alexander de nudos clásicos es a través de la *representación de Burau*.

$t = 1 \Rightarrow$ matrices de permutación

$$\varphi_n : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]), \quad U_i = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right)$$

$\sigma_i \mapsto U_i$

Pregunta del millón

¿Es fiel la representación de Burau para $n = 4$? \Rightarrow

$n \geq 5$ no es fiel

$n \leq 3$ si es fiel

$J_{K=1} \Leftrightarrow K=0$
pol. de Jones
distinguiría el
nudo trivial

¿Por qué \mathcal{Q} es de tipo Alexander?

Una de muchas construcciones del polinomio de Alexander de nudos clásicos es a través de la *representación de Burau*.

$$\begin{array}{l} \varphi_n^r : B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \\ \sigma_i \mapsto V_i \end{array}, \quad V_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} I_{i-2} & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & t & -t & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & I_{n-i-2} \end{array} \right)$$

Ésta se puede reducir a $\varphi_n^r : B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ y el pol. de Alexander de un nudo K se calcula como

$$\Delta_K(t) \doteq \frac{1-t}{1-t^n} \det(\varphi_n^r(\beta) - I_{n-1})$$

¿Por qué \mathcal{Q} es de tipo Alexander?

Una de muchas construcciones del polinomio de Alexander de nudos clásicos es a través de la *representación de Burau*.

$$\begin{array}{l} \varphi_n^r : B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \\ \sigma_i \mapsto V_i \end{array}, \quad V_i = \left(\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-2} \end{array} \right)$$

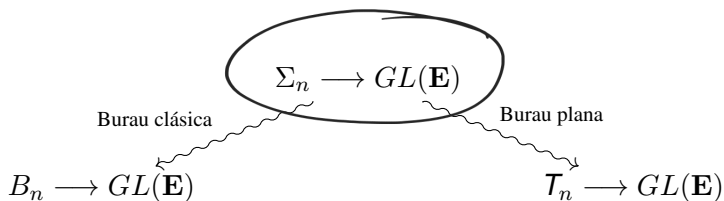
Ésta se puede reducir a $\varphi_n^r : B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ y el pol. de Alexander de un nudo K se calcula como

$$\Delta_K(s) = (-1)^{n+1} \frac{s^{-\langle \beta \rangle} (s - s^{-1})}{s^n - s^{-n}} g(\det(\varphi_n^r(\beta) - I_{n-1}))$$

donde $\beta \in B_n$ con $\widehat{\beta} \sim K$, $\langle \beta \rangle$ la diferencia de cruces positivos y negativos, y $g : \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[s, s^{-1}]$ con $g(t) = s^2$.

Relación con $H(q)$

Siguiendo un trabajo reciente de Doty y Giaquinto, resulta que hay dos q -análogos de la acción de Σ_n en $\mathbf{E} = \mathbb{C}^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, donde (i, j) actúa como reflexión en el hiperplano $\langle e_i - e_j \rangle^\perp$.



Relación con $H(q)$

Definición

Sea $q \in \mathbb{C}$ invertible, el *álgebra de Hecke* $H_n(q)$ de tipo A sobre \mathbb{C} es el álgebra con unidad con generadores T_1, \dots, T_{n-1} y relaciones:

1. $T_i T_j = T_j T_i$ para $|i - j| > 1$;
2. $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n - 2$;
3. $T_i^2 = (q - 1)T_i + q$ para $i = 1, \dots, n - 1$.

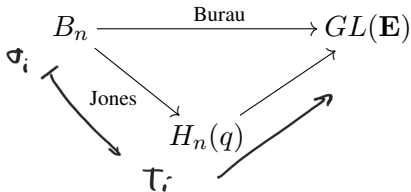
Las matrices de la representación de Burau,

$$U_i = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 - q & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right)$$

U_i 's cumplen las relaciones

satisfacen las mismas relaciones 1, 2 y 3.

Más aún, podemos definir una acción de $H_n(q)$ en $\mathbf{E} = \mathbb{C}^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ tal que



a saber

$$T_i \cdot e_j = \begin{cases} (1 - q)e_i + e_{i+1} & \text{si } j = i, \\ qe_i & \text{si } j = i + 1, \\ e_j & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, nuestras matrices de la representación de Burau en el grupo de trenzas planas

$$V_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & x & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad V_i = \left(\begin{array}{ccc|cc} I_{i-2} & & & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & x & -1 & x & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad V_{n-1} = \left(\begin{array}{cc|c} I_{n-3} & & 0 \\ & 1 & 0 \\ 0 & & x & -1 \end{array} \right).$$

satisfacen las ecuaciones

1. $V_i^2 = 1$ para $i = 1, \dots, n - 1$;
2. $V_i V_j = V_j V_i$ para $|i - j| > 1$;
3. $V_i V_{i+1} V_i - V_{i+1} V_i V_{i+1} = (x^2 - 1)(V_i - V_{i+1})$ para $i = 1, \dots, n - 2$.

Teorema (cf. Mitsuhashi '01)

Si $q + 1$ es invertible, el álgebra de Hecke $H_n(q)$ es isomorfa al álgebra generada por S_1, \dots, S_{n-1} tales que

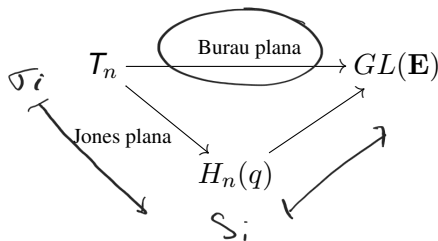
1. $S_i^2 = 1$ para $i = 1, \dots, n - 1$;
2. $S_i S_j = S_j S_i$ para $|i - j| > 1$;
3. $S_i S_{i+1} S_i - S_{i+1} S_i S_{i+1} = \left(\frac{q-1}{q+1}\right)^2 (S_i - S_{i+1})$ para $i = 1, \dots, n - 2$.

Las V_i 's cumplen estas relaciones

Con otra base f_1, \dots, f_n de \mathbf{E} , la acción inducida de $H_n(q)$ es tal que se obtiene una representación de Burau plana no reducida con matrices

$$U_i = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1-q}{1+q} & \frac{2\sqrt{q}}{1+q} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{q}}{1+q} & -\frac{1-q}{1+q} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right)$$

donde



La representación se puede reducir, obteniéndose las matrices

$$V_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{2\sqrt{q}}{1+q} & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad V_{n-1} = \left(\begin{array}{c|cc} I_{n-3} & & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & \frac{2\sqrt{q}}{1+q} & -1 \end{array} \right),$$

$$V_i = \left(\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-2} & & 0 & & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{2\sqrt{q}}{1+q} & -1 & \frac{2\sqrt{q}}{1+q} & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & I_{n-i-2} \end{array} \right).$$

Que son exactamente las matrices que ya habíamos obtenido para construir nuestro invariante:

$$V_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & x & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad V_i = \left(\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-2} & & 0 & & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & x & -1 & x & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad V_{n-1} = \left(\begin{array}{c|cc} I_{n-3} & & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & x & -1 \end{array} \right).$$

La representación se puede reducir, obteniéndose las matrices

$$V_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{2\sqrt{q}}{1+q} & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad V_{n-1} = \left(\begin{array}{cc|c} I_{n-3} & & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & \frac{2\sqrt{q}}{1+q} - 1 \\ \hline & & \end{array} \right),$$

$$V_i = \left(\begin{array}{ccc|c|c} I_{i-2} & & & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & \frac{2\sqrt{q}}{1+q} - 1 & \frac{2\sqrt{q}}{1+q} & 0 \\ & & 0 & 1 & \\ \hline & & & & I_{n-i-2} \end{array} \right).$$

Que son exactamente las matrices que ya habíamos obtenido para construir nuestro invariante:

$$V_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & x & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & & I_{n-3} \end{array} \right), \quad V_i = \left(\begin{array}{ccc|c|c} I_{i-2} & & & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & x & -1 & x \\ & & 0 & 0 & 1 \\ \hline & & & & I_{n-i-2} \end{array} \right), \quad V_{n-1} = \left(\begin{array}{cc|c} I_{n-3} & & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & x - 1 \\ \hline & & \end{array} \right).$$

gracias!