Todo lleno de círculos

por Omar Antolín Camarena

La recta y el plano

Una vez mi amigo Juan José Alba Gónzalez me preguntó si se puede llenar el plano con círculos de interiores ajenos. Durante los siguientes días estuvimos pensando en una serie de problemas relacionados y en el siguiente Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana dimos una plática al respecto. Todos los resultados que obtuvimos son conocidos, pero es posible que en algún caso nuestra prueba sea diferente a las que hay en la literatura. En cualquier caso, son problemas divertidos y fáciles de entender, pero cuya solución (nos pareció) requiere algún ingenio. Por favor, envíen a esta revista cualquier solución mejorada a uno de estos problemas que puedan hallar.

Empecemos por la misma pregunta con la que empezamos Juanjo y yo. Primero, déjenme aclarar por qué es razonable la claúsula sobre los interiores ajenos. Los círculos son subconjuntos cerrados del plano, pero son cerrados sencillos en el sentido de que son la clausura de sus interiores. Si uno quiere llenar el plano con conjuntos de ese tipo sin que se traslapen, la definición natural de no traslaparse es que los interiores sean ajenos. Por ejemplo, cuando uno divide el plano en cuadrados unitarios por medio de las rectas $x = m$ y $y = n$, si uno piensa en (1) los interiores de los cuadrados, éstos no cubren todo el plano: omiten esas rectas, o (2) los cuadrados cerrados, éstos no son realmente ajenos: comparten lados.

Claro que uno puede preguntarse también si se puede llenar el plano con círculos ajenos, o cuadrados ajenos, en lugar de preguntar las versiones con interiores ajenos. Tenemos hasta ahora tres preguntas interesantes:

1. ¿Se puede llenar el plano con círculos de interiores ajenos?

2. ¿Se puede llenar el plano con círculos ajenos?

3. ¿Se puede llenar el plano con cuadrados ajenos?

La intuición nos decía que la respuesta a las tres preguntas es no. (Y desde luego, si la respuesta a la pregunta 1 es no, entonces automáticamente la respuesta a 2 es no.) Pero probarlo es más díficil de lo que parece. En esas situaciones usualmente es ventajoso pensar en problemas parecidos pero más simples y con problemas geométricos, una manera efectiva de obtener tales problemas es considerar la situación análoga en menos dimesiones. Aquí hay al menos dos formas de hacer eso: pensar en la recta en lugar del plano o pensar en cosas de dimensión uno llenando el plano. Obtenemos así tres preguntas más:

4. ¿Se puede llenar la recta con intervalos cerrados ajenos?

5. ¿Se puede llenar el plano con circunferencias ajenas?

6. ¿Se puede llenar el plano con “cuadrados huecos” ajenos?

La pregunta 4 es la versión unidimensional natural de tanto la pregunta 2 como la 3, en cambió la pregunta 1 se volvería “¿Se puede llenar la recta con intervalos de interiores ajenos?”, cuya es respuesta es obviamente sí. Esta nueva ronda de preguntas nos animó porque 5 y 6 son fáciles. Consideren llenar el plano con circunferencias. Casi se puede: las circunferencias con centro en un punto dado O llenan todo el plano salvo O; pero, después de pensarlo un rato, da la impresión de que siempre adentro de una circunferencia va a haber un punto que no se pueda cubrir. (Por cierto, queda de TAREA llenar todo el plano salvo por un punto con circunferencias de manera que no todas sean concéntricas.) Esto no es difícil de probar.

Teorema 1. *No es posible llenar el plano con circunferencias ajenas.*

Demostración. Supongamos que sí es posible y tomemos una de las circunferencias C_1. El centro de C_1 debe estar sobre alguna otra de las circunferencias, digamos C_2, y C_2 debe estar completamente adentro de C_1 pues de lo contrario la intersectaría. Análogamente, el centro de C_2 debe estar sobre una circunferncia C_3 que esté adentro de C_2 y así sucesivamente. Las circunferencias $C_1, C_2, \ldots$ están anidadas en el sentido de que cada una está adentro de las anteriores y sus radios tienden a cero (el radio de cada una es a lo más la mitad del radio de la anterior). Por lo tanto, hay un único punto P dentro de todas ellas. Ahora terminamos, pues P no puede estar cubierto por alguna circunferencia de la descomposición del plano: cualquier circunferencia por P intersecta a una (infinidad) de las circunferencias C_n. $\square$

Un argumento muy similar muestra que la respuesta a la pregunta 6 también es no. Sigue habiendo preguntas interesantes relacionadas a llenar el plano con circunferencias. Ya vimos que llenar el plano es imposible, pero llenar el plano menos un punto es posible. ¿Será posible llenar el plano menos dos puntos? Noten que el argumento en la demostración anterior nos diría que siempre que se llene parte del plano con circunferencias, dentro de cada circunferencia hay al menos uno de los puntos no llenados, o sea que, sí fuera posible llenar el plano menos dos puntos, cada circunferencia debe tener al menos uno de los dos puntos adentro. Dejemos este problema de lado por el momento: prometó platicar la solución en la próxima sección.

La pregunta sobre llenar la recta con intervalos ajenos no nos pareció mucho más simple que las preguntas originales sobre llenar el plano con circunferencias. En ambos casos lo mejor que habíamos logrado era convencernos ampliamente de su imposibilidad, sin idea de cómo probarlo, y observar que en caso de ser posible, se usarían una cantidad numerable de piezas. Esto último es un truco estándar: si el plano se pudiera llenar con círculos de interiores ajenos, por ejemplo, podríamos escoger en el interior de cada círculo un punto de coordenadas racionales. Los puntos elegidos serían todos distintos, lo cual prueba que hay a lo más tantos círculos como puntos de coordenadas racionales, es decir, a lo más una cantidad numerable. Obviamente un número finito no llenan el plano, así que si fuera posible llenar el plano, se usarían una cantidad numerable de círculos.

Y luego tuvimos un buen avance en este punto (lo cual confirmó que considerar los problemas relacionados en menos dimensiones era buena idea): vimos que para probar que era imposible llenar el plano con círculos bastaba probar que era imposible llenar la recta con intervalos. Supongamos que es posible llenar el plano con círculos de interiores ajenos. ¿Qué pasa cuando intersectamos esos círculos con una recta en el plano? ¡La recta queda llena de intervalos cerrados ajenos!

Bueno, casi: (1) algunos intervalos pueden reducirse a puntos si la recta es tangente a algunos círculos y (2) algunos intervalos pueden compartir un extremo si la recta pasa por el punto de tangencia de dos círculos. Pero teniendo tan pocos círculos (una cantidad numerable) y tantas rectas (la cardinalidad del continuo), no es díficil evitar ambas situaciones.

El número de puntos de tangencia es a lo más numerable, pues es a lo más el número de parejas de círculos. (Este tipo de estimaciones sobradísimas suelen ser suficientes con cardinales infinitos.) Así que por ellos no hay que preocuparse. Pero lo de las tangencias es ligeramente más problemático: el conjunto de rectas tangentes a una circunferencia dada tiene ya la cardinalidad del continuo. Esto se arregla fijando la dirección de la recta: si consideramos solo rectas paralelas a una recta fija, por cada círculo hay exactamente dos rectas tangentes, así que las tangencias solo eliminan una cantidad numerable de rectas.

Ahora sí: ya probamos que si fuera posible llenar el plano con círculos de interiores ajenos, sería posible hallar alguna recta del plano (de hecho, tantas como la cardinalidad del continuo) cuyas intersecciones con los círculos la llenan de intervalos cerrados ajenos. Esto prueba el siguiente teorema:

Teorema 2. *Es imposible llenar el plano con círculos de interiores ajenos.*

Siempre y cuando demostremos éste:

Teorema 3. *Es imposible llenar la recta con intervalos cerrados ajenos.*

(Por cierto, como TAREA prueben la variante de ese teorema con intervalos abiertos: es mucho más fácil.)

Este último teorema requiere técnicas completamente distintas. Después de finalmente resolverlo, le preguntamos a Alejandro Illanes si conocía otra prueba y nos dijo que es un caso particular de un resultado bastante general. No recuerdo en detalle cual era el resultado, pero les puedo decir que daba condiciones suficiente para que un espacio sea σ-conexo y que viene en el libro(te) de topología de Adalberto García-Máynez que publicó la editorial Porrúa. Es eufemístico decir que la prueba que dimos Juanjo y yo es apreciablemente menos general. Se basa en la idea de que los intervalos cerrados ajenos estarían obligados a estar amontonados muy densamente y que esto no es posible teniendo tan poquitos.

Demostración. Supongamos que es posible llenar la recta con intervalos cerrados ajenos. Ya dijimos que tienen que ser una cantidad numerable, así que numerémoslos $[a_n, b_n]$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$. El truco es considerar el conjunto $A = \{a_n : n \geqslant 1\}$ como un conjunto totalmente ordenado (por el orden usual de los números reales). Hay una caracterización del orden de los reales que dice que para que un conjunto totalmente ordenado sea isomorfo a los reales basta que

a) no tenga ni máximo ni mínimo,

b) contenga un subconjunto numerable denso, y

c) cumpla el axioma del supremo.

Si probamos que A satisface esas tres condiciones, tendrá que ser isomorfo a los reales, lo cual nos da la contradicción deseada, pues A es numerable.

La condición a) es obvia. Para la condición b), usaremos a A mismo como subconjunto numerable. Decir que B es denso en un conjunto totalmente ordenado A quiere decir que entre cualesquiera dos puntos de A hay al menos uno de B. Así que debemos probar que entre cualesquiera dos extremos izquierdos de intervalos hay otro intervalo. Esto es obvio porque hay que llenar el hueco entre los dos intervalos.

Finalmente, debemos probar que A satisface el axioma del supremo. Sea S un subconjunto de A acotado superiormente. Los números reales sí satisfacen el axioma del supremo, así que S tiene un supremo s en $\mathbb{R}$. Lo que debemos probar es que $s \in A$. Bueno, s debe estar cubierto por alguno de los intervalos, digamos $[a_n,\ b_n]$. Cualquier elemento de S es menor o igual que s y, al mismo, tiempo es extremo izquierdo de algún intervalo. Estas dos cosas muestran que cualquier elemento de S es menor o igual que a_n. Así que a_n también es cota superior de S. Como $a_n \leqslant s = \sup S$, debemos tener $s = a_n$. □

El espacio y dimensiones mayores

La idea que aparece en la sección anterior de reducir la dimensión del problema, no es especial para el plano. El argumento análogo reduce el problema de esferas a círculos o de hiperesferas a esferas. Queda de TAREA cerciorarse de que funciona un argumento por inducción en la dimensión para probar el siguiente teorema:

Teorema 4. *Para cualquier $n \geqslant 2$ es imposible llenar $\mathbb{R}^n$ con esferas sólidas de dimensión n de interiores ajenos.*

También se generaliza fácilmente el teorema sobre circunferencias, éste sin necesidad de hacer inducción en la dimensión sino generalizando la prueba:

Teorema 5. *Para cualquier $n \geqslant 2$ es imposible llenar $\mathbb{R}^n$ con esferas huecas ajenas de dimensión $n - 1$.*

(Aquí la dimensión es $n-1$ porque, por ejemplo, una circunferencia es una curva, o sea, tiene dimensión uno; una esfera hueca es una superficie y tiene dimensión dos.)

En esto de llenar espacios con esferas, la menor combinación de dimensión que nos falta investigar es el espacio (de dimensión 3) con circunferencias. Revisar con cuidado las pruebas de los teoremas pasados sugiere que o bien se necesitan ideas nuevas para probar que el espacio no se puede llenar con circunferencias, o bien sí se puede llenar. Si no se ve cómo probar que es imposible, intentemos llenarlo: ¿qué conjuntos más simples sabemos llenar de circunferencias ya? Ya sabemos como llenar el plano menos un punto, por ejemplo. Y apilando muchas copias de un plano lleno de esa forma, podríamos llenar, por ejemplo, el espacio menos una recta –alineando todos los puntos omitidos de los planos. En otras palabras: si consideramos una recta vertical, cualquier plano horizontal la corta en un punto y el resto del plano puede entonces llenarse con circunferencias.

¿Pero podríamos, en lugar de alinear los puntos omitidos, formarlos en circunferencias?

Todavía no, si insitimos en usar planos, porque sólo sabemos llenar el plano menos un punto, no el plano menos dos. De hecho, en la sección pasada quedó pendiente ver si era posible llenar con circunferencias todo el plano menos dos puntos. Posponiendo un poco más la solución, veamos primero si realmente serviría para llenar el espacio con circunferencias: suponiendo que es posible llenar de circunferencias ajenas el plano sin dos puntos, ¿realmente podríamos apilar planos con uno o dos puntos omitidos de manera que todos los puntos omitidos estén formados en circunferencias?

Otra manera de formular esa pregunta es: ¿podemos hallar un conjunto de circunferencias ajenas en el espacio de manera que cada plano horizontal corte al conjunto en uno o dos puntos? Eso no es muy difícil de hacer. Si consideramos una cadena vertical de circunferencias, cada una tangente a la siguiente, cada plano horizontal corta a la cadena en uno o dos puntos; pero no nos sirve porque las circunferencias de la cadena no son ajenas. Esto se arregla fácilmente: solo hay que desplazar las circunferencias alternadamente a la izquierda y a la derecha, rompiendo así las tangencias. Ahora, cada plano horizontal corta en dos puntos al conjunto de circunferencias: cada plano o bien corta a una sola en dos puntos, o bien es tangente a dos circunferencias.

Así que, siempre y cuando probemos que es posible llenar el plano menos dos puntos con circunferencias, también es posible llenar el espacio con circunferencias.

Desafortunadamente,

Teorema 6. *Es imposible llenar todo el plano salvo dos puntos con circunferencias ajenas.*

Demostración. Supongamos que fuera posible llenar el plano salvo por lo puntos P y Q con circunferencias ajenas. Para fijar ideas, imaginemos a PQ horizontal con P a la izquierda de Q. Ya habíamos comentado en la sección anterior, que cada circunferencia debe tener al menos uno de los puntos P y Q adentro. Las circunferencias que pasen por puntos del interior del segmento PQ no pueden tener adentro tanto a P como a Q, tienen que "escoger" uno. Y si la circunferencia C que pasa por $T \in PQ$ tiene adentro a P, todas las que pasen por puntos de PQ que estén a la izquierda de T (o sea, por puntos del segmento PT) deben escoger a P (pues de lo contrario cortarían a C).

Entonces, los puntos de PQ que escogen a P forman un segmento y los que escogen a Q forman otro. Cuando un intervalo se escribe como unión ajena de dos, o bien el de la izquierda incluye su extremo derecho, o bien el de la derecha incluye su extremo izquierdo. Supongamos sin perder generalidad que los puntos que escogen a P son los de $(P, R]$ y los que escogen a Q son (R, Q) y llamémosle C a la circunferencia del llenado que pasa por R. Los puntos dentro del "helado (con barquillo)" formado por C y Q (ver figura), tampoco pueden estar sobre circunferencias que tengan adentro tanto a P como a Q, es decir, también tienen que escoger. Además, puntos como U o V, dentro del barquillo y fuera de la bola de helado C, no pueden estar en circunferencias que tengan adentro a P, pues esas circunferencias cortarían a RQ, y los puntos de RQ ya escogieron a Q. Entonces, las circunferencias del llenado que pasan por U y V deben tener adentro a Q y no pueden cortar a C. Esto las obliga a intersectarse. (Tarea: ¿Por qué?)

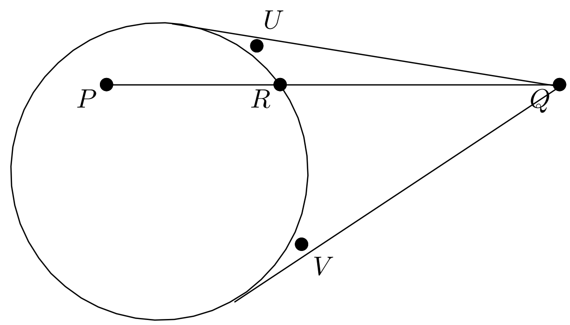

Figura 1.

□

¿Será entonces imposible llenar el espacio con circunferencias? Todavía no podemos concluir eso, porque al llenar el espacio no estamos obligados a usar planos con dos puntos removidos. Lo que sí, tenemos un argumento nuevo de imposibilidad y es buena idea intentar adaptarlo al caso del espacio. Pensándolo un poco, verán que el argumento no funciona en el espacio: usa demasiado lo restrictivo del plano a la ahora de acomodar circunferencias. (Esto, claro, no es muy preciso, pero estas sensaciones intuitivas son muy importantes a la hora de decidir como repartir el tiempo entre distintos caminos para responder una pregunta.)

Si seguimos con la estrategia anterior, necesitamos más figuras simples que sepamos llenar con circunferencias, para intentar llenar con estas figuras el espacio. Hasta ahora, lo único que realmente hemos logrado llenar con circunferencias es el plano menos un punto. Los que conozcan la proyección estereográfica, saben que eso es equivalente a llenar de circunferencias una esfera (hueca) menos *dos* puntos. Eso ya nos dan más oportunidades de llenar el espacio.

Pero antes de seguir con eso, déjenme explicar, para los que no conocen la proyección esterográfica y sus propiedades (y claro, queda de TAREA familiarizarse con esto), cómo llenar una esfera menos dos puntos con circunferencias. Si los dos puntos son diametralmente opuestos, los podemos imaginar como el polo norte y el polo sur. Entonces, los paralelos llenan el resto de la esfera. Si no son diametralmente opuestos, podemos considerar los planos tangentes a la esfera en los dos puntos. Estos planos tangentes se cortan a lo largo de una recta y los planos que pasan por esa recta, en el ángulo diedro entre los planos tangentes, cortan a la esfera en circunferencias ajenas que la llenan toda salvo los dos puntos. TAREA: ¿en qué sentido ambos casos, puntos diametralmente opuestos y no, se resolvieron igual?

¿Con esto podemos repetir la construcción que habíamos hecho con los planos menos dos puntos? No suena tan descabellado porque una esfera que no contiene a una circunferencia, la corta en uno o dos puntos. Tenemos una pequeña complicación en que ahora no tenemos un análogo claro para esferas de la colección de planos horizontales que usamos antes. (Pero tenemos la enormísima ventaja de que *sí* es posible llenar la esfera menos dos puntos, así que no es momento para quejarse.) La manera más simple de llenar (casi todo) el espacio con esferas es usando todas las esferas con centro en un punto fijo O.

Ahora, ¿cómo podemos quitar circunferencias del espacio de manera que quitemos dos puntos de cada esfera con centro en O? Si pudiéramos usar rectas sería fácil: simplemente tomamos una recta que pase por O y esa corta a cada esfera con centro en O en dos puntos. (Así volvemos a llenar el espacio menos una recta con circunferencias, pero de hecho, obtenemos el mismo llenado que antes.) Si en lugar de la recta, consideramos un circunferencia con centro en O, esa funciona para las esferas pequeñas: cualquier esfera con centro en O y radio menor que el diámetro de la circunferencia la corta en dos puntos. La esfera con radio exactamente igual al diámetro de la circunferencia es tangente a ella y las esferas de radio mayor no la cortan. Claramente necesitamos más circunferencias para estas esferas mayores.

Con un poco de experimentación, llegamos a la siguiente familia de circunferencias. Una tira, horizontal digamos, de circunferencias todas de diámetro 1, con una separación de 1 entre circunferencias consecutivas. Para ser más precisos: las circunferencias en el plano xy con diámetro el segmento de $(2n, 0, 0)$ a $(2n+1, 0, 0)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Aquí suponemos que el punto O es el origen de $\mathbb{R}^3$. Es fácil ver que cualquier esfera con centro en O o bien corta en dos puntos a una de estas circunferencias, o bien es tangente a dos de ellas, una del lado positivo del eje x y otra del lado negativo.

Esto finalmente prueba que el espacio se puede llenar con circunferencias.

Teorema 7. *El espacio tridimensional se puede llenar con circunferencias ajenas.*

Y para concluir, déjenme mostrarles que el Teorema 7 no es la última palabra en llenar el espacio con circunferencias:

Teorema 8. *El espacio tridimensional se puede llenar con circunferencias ajenas* ***de igual radio****.*

Demostración. Sea $\mathfrak{c}$ la cardinalidad del continuo. Casi cualquier conjunto razonable de objetos geométricos tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$: los puntos, los planos, las circunferencias de radio 1, etc.

Sea $\{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una numeración de los puntos del espacio por los ordinales menores que $\mathfrak{c}$. Construiremos por inducción una familia de circunferencias de radio 1, $\{C_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$, tal que para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, P_α está sobre C_α, y que para cualesquiera $\alpha \neq \beta$, C_α y C_β son iguales o ajenas (es decir, permitimos repeticiones entre las circunferencias, pero las que sean distintas deben ser ajenas). Desde luego, esta familia de circunferencias debe llenar el espacio.

Supongamos ya construidas las circunferencias $\{C_\beta : \beta < \alpha\}$ para algún ordinal $\alpha < \mathfrak{c}$. Si alguna C_β con $\beta < \alpha$ pasa por P_α, tomamos $C_\alpha = C_\beta$.

Supongamos ahora que ninguna de las C_β con $\beta < \alpha$ pasa por P_α. Probemos que es posible hallar una circunferencia de radio 1 que pase por P_α y que no intersecte a las circunferencias previas. Estas circunferencias están en a lo más $|\alpha|$ planos distintos y hay $\mathfrak{c}$ planos que pasan por P_α, así que podemos elegir un plano por P_α, digamos π, que no contenga a ninguna de las circunferencias previas. Buscaremos a C_α entre las $\mathfrak{c}$ circunferencias de radio 1 que pasan por P_α y están contenidas en π.

Cada C_β corta a π en a lo más dos puntos, así que hay a lo más $2|\alpha|$ puntos en π que debemos evitar (y ninguno de estos puntos a evitar es P_α). Cada punto en π (que no sea P_α) está en a lo más dos circunferencias candidatas, así que hay a lo más $4\,|\alpha|$ candidatas que no nos sirven. Como $4\,|\alpha| < \mathfrak{c}$, es posible elegir C_α entre las circunferencias candidatas sobrantes. $\square$