Extensiones de Kan

Omar Antolín Camarena

22 de febrero de 2019

1. Ejemplos generales de extensiones de Kan izquierdas

Para cada uno de los siguientes functores $K : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, describe la extensión de Kan izquierda $\mathrm{Lan}_K F$ para un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ arbitrario (a una categoría cocompleta $\mathcal{C}$). También procura dar una descripción intuitiva de que significa el funtor arbitrario F, por ejemplo, si $\mathcal{A} = B\mathbb{N}$ un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ es un endomorfismo en $\mathcal{C}$.

1. $\mathcal{A} = * \sqcup * = \{0, 1\}$, la categoría con dos objetos y sin morfismos aparte de las identidades.

   $\mathcal{B} = \mathbb{2}$, la categoría con dos objetos y un morfismo entre ellos, $0 \to 1$.

   K la inclusión obvia: $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$.

2. $\mathcal{A} = \{1 \leftarrow 0 \to 2\}$, la forma de diagrama para los coproductos amalgamados.

   $\mathcal{B} = \ = \{0 < 1 < 2\}$, el ordinal 3 pensado como categoría.

   K la inclusión obvia $i \mapsto i$.

3. $\mathcal{A} = \mathbb{2}$, $\mathcal{B} = B\mathbb{N}$, K el funtor que elige el morfismo $1 \in \mathbb{N}$.

4. $\mathcal{A} = \mathbb{2}$. $\mathcal{B} = \mathbb{I}$, la categoría con dos objetos 0 y 1, y un único isomorfismo entre ellos en cada dirección (esos dos isomorfos son inversos uno del otro). K la inclusión obvia.

5. $\mathcal{A} = \mathbb{2} \sqcup_{\{0,1\}} \mathbb{2}$, la categoría con objetos 0 y 1 y dos flechas paralelas entre ellos.

   $\mathcal{B} = \mathbb{2}$ y K el funtor que identifica las dos flechas.

2. Extensiones de Kan y la categoría de elementos

NOTA: Corregí la varianza de P y la notación en la conclusión.

Sea $P : \mathcal{A} \to \mathrm{Set}$ un funtor, y $\pi : \int_{\mathcal{A}} P \to \mathcal{A}$ la proyección desde la categoría de elementos de P[1]. Sea $F : \int_{\mathcal{A}} P \to \mathcal{C}$ un funtor arbitrario a una categoría cocompleta. Demuestra que $\mathrm{Lan}_\pi F(A) = \coprod_{x \in P(A)} F((x, A))$.

[1] Recuerden que hay dos versiones de la categoría de elementos. Aquí queremos la versión donde un morfismo $(x, A) \to (y, B)$ (con $x \in P(A)$, $y \in P(B)$) es un morfismo $f : A \to B$ tal que $P(f)(x) = y$. No hay riesgo de confusión pues la otra versión no tiene una proyección hacía $\mathcal{A}$ sino hacia $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$.

3. Invirtiendo elementos actuando sobre módulos

Vimos parte de este ejemplo en clase. Sea R un anillo conmutativo, M un R-módulo y $a \in R$. Sea $i : B\mathbb{N} \to B\mathbb{Z}$ la inclusión y $F : B\mathbb{N} \to \mathsf{Mod}_R$ el funtor que corresponde al endormorfismo $\bar{a} : M \to M$, $x \mapsto ax$.

1. Dijimos que
$$\mathrm{Lan}_i F(*) = \mathrm{colim}(M \xrightarrow{\bar{a}} M \xrightarrow{\bar{a}} \cdots) \cong M[a^{-1}].$$
¿Qué sucede con los morfismos, qué es $\mathrm{Lan}_i F(1 \in Z)$?

2. Como ejemplo concreto, sea $M = R[x]$ y $a = x$. Describe $\mathrm{Lan}_i F$ y también $\mathrm{Ran}_i F$.