Categorías enriquecidas, 2-categorías, cuasicategorías

Omar Antolín Camarena

13 de junio de 2019

1. Categorías enriquecidas

1. Los reales no negativos extendidos, $\bar{\mathbb{R}}_{\geq 0} := \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$, con el orden opuesto al usual es una categoría monoidal simétrica donde el producto tensorial es la suma de reales.

   - ¿A qué propiedad de la suma corresponde su funtorialidad como producto tensorial?
   - ¿Es cerrada como categoría monoidal simétrica?
   - ¿A qué objeto matemático clásico y famoso se parecen las categorías enriquecidas en $\bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$? ¿Cuáles son las diferencias? ¿Cuál es la categoría subyacente a una de estas categorías enriquecidas?

2. 2-categorías

1. Sea $\mathcal{C}$ una 2-categoría. Una *adjunción* en $\mathcal{C}$ consta de objetos A, B, morfismos $f : A \to B$, $g : B \to A$ y 2-morfismos $\eta : 1_A \to gf$, $\epsilon : fg \to 1_B$ que se satisfacen las identidades triangulares: $(\epsilon f) \circ (f\eta) = 1_f$ y $(g\epsilon) \circ (\eta g) = 1_g$.

   Parte de este ejercicio es entender la notación.

   - ¿Qué significan ϵf, $f\eta$, etc.? Descríbelos en términos de las categorías-hom $\mathcal{C}(A, B)$, $\mathcal{C}(B, A)$, etc. y de los functores de composición $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, A) \to \mathcal{C}(B, B)$, etc. ¿Qué dicen esos términos las identidades triangulares?
   - Dibuja las identidades triangular como diagramas de pegado.

   Ahora sí, algo para demostrar:

   - Una *equivalencia* en una 2-categoría se puede definir parecido a una adjunción: dejamos de pedir que se cumplan las identidades triangulares y en su lugar pedimos que η y ϵ sean isomorfismos, es decir 2-morfismos invertibles. Demuestra que si $(A, B, f, g, \eta, \epsilon)$ forman una equivalencia, es posible cambiar ϵ por un ϵ' de manera que $(A, B, f, g, \eta, \epsilon')$ sea simultáneamente una adjunción y una equivalencia.

3. Cuasicategorías

1. Demuestra que las dos definiciones de homotopía para 1-simplejos de una cuasicategoría X producen la misma relación de equivalencia. Las dos definiciones son: dados dos 1-simplejos $f, g : x \to y$,

   - $f \sim_L g$ si existe un $\lambda \in X_2$ tal que $d_0\lambda = f$, $d_1\lambda = g$ y $d_2\lambda = s_0 x$, y
   - $f \sim_R g$ si existe un $\rho \in X_2$ tal que $d_0\rho = s_0 y$, $d_1\rho = g$ y $d_2\rho = f$.

2. Prueba el nervio del isomorfismo ambulante $\mathbb{I}$ tiene exactamente dos simplejos no degenerados en cada dimensión. Prueba que la inclusión $\mathbb{2} \to \mathbb{I}$ se puede obtener como sigue: hay una sucesión de conjuntos simpliciales $X_2 \to X_3 \to X_4 \to \cdots$ donde

   - $X_2 = \Delta^1$, el nervio de $\mathbb{2}$,
   - X_{n+1} se obtiene como pushout:

     $$\begin{array}{ccc} \Lambda^0[n] & \longrightarrow & X_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[n] & \longrightarrow & X_{n+1} \end{array}$$

     para algún morfismo $\Lambda^0[n] \to X_n$, y
   - El colímite de los X_n es el nervio de $\mathbb{I}$ y el morfismo canónico de X_2 al colímite es la inclusión $\mathbb{2} \to \mathbb{I}$.