

Teoría de ∞ -categorías en ∞ -cosmos

Omar

9 de junio de 2019

1. Objetos iniciales y finales

1. Prueba que en un ∞ -cosmos cartesianamente cerrado (o sea, con hom interno A^B), un objeto inicial de una ∞ -categoría A es el límite del functor identidad $A \rightarrow A$.
2. Prueba que cualesquiera dos objetos iniciales de una ∞ -categoría A son isomorfos en su categoría homotópica hA .
3. Prueba que si una ∞ -categoría A tiene un objeto inicial \emptyset , un objeto final 1 y tiene un morfismo $1 \rightarrow \emptyset$, entonces es una ∞ -categoría punteada.

2. Adjunciones

1. Dada una adjunción en un ∞ -cosmos, digamos $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$, $f \dashv g$, y dadas equivalencias $A \simeq A'$ y $B \simeq B'$, construye una adjunción entre A' y B' .
2. Sea J es un conjunto simplicial, y sean A y B ∞ -categorías en un ∞ -cosmos \mathcal{K} tales que tanto A como B admiten colímites para todos los diagramas de forma J . Supón que $f : B \rightarrow A$ es un adjunto izquierdo. Prueba que f preserva J -colímites en el sentido de que el siguiente cuadrado conmuta salvo isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} B^J & \xrightarrow{f^J} & A^J \\ \text{colim} \downarrow & & \text{colim} \downarrow \\ B & \longrightarrow & A \end{array}$$

3. Functores sofocantes

1. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funtores entre categorías ordinarias tales que f es supra-yectivo en objetos y en morfismos, y $g \circ f$ es sofocante. Prueba que g es sofocante.

4. El *join gordo*

1. (a) Describe el *join gordo* de $\Delta^0 \diamond \Delta^1$, en particular prueba que no es isomorfo a Δ^2 .
(b) Cálcula $\Delta^m \diamond \Delta^n$ y define una sección $\Delta^{m+n} \cong \Delta^m * \Delta^n \rightarrow \Delta^m \diamond \Delta^n$ del mapa canónico del *join gordo* al *join* estándar.