

# Matroides Críticamente Conexos

ALUMNO: OMAR ANTOLÍN CAMARENA

DIRECTOR DE TESIS: JORGE LUIS AROCHA PÉREZ



# Índice

Índice .....	1
<b>I Caracterización .....</b>	<b>2</b>
1 Conjuntos de puntos que fijan .....	5
2 Preliminares matroidales .....	7
3 Subdivisiones y subdivisiones fantasmas .....	9
4 Todos los matroides críticamente conexos .....	13
4.1 Todos los fijadores minimales .....	15
4.2 Todos los bloques minimales .....	16
<b>II Aplicaciones .....</b>	<b>17</b>
5 Números de Helly .....	19
5.1 La utilidad del corazón .....	20
5.2 La clausura por componentes y la retícula de particiones .....	21
5.3 El número de Helly de la retícula de particiones .....	22
6 Seudobases proyectivas .....	23
Apéndice A Operadores de clausura .....	25
Bibliografía .....	27

**Parte I**

**Caracterización**





# Capítulo 1

## Conjuntos de puntos que fijan

Para fijar una hoja de papel a un tablero se requieren dos tachuelas. ¿Por qué es esto? Si movemos la hoja de papel sin sacarla de su plano, la posición final se obtiene de la inicial aplicando una isometría directa del plano. Dados dos puntos en el plano (dos tachuelas), la única isometría directa que fija esos dos puntos es la identidad. Por eso dos tachuelas bastan. Una no, porque permite que la hoja gire, es decir, las rotaciones con centro en un punto lo fijan y no son la identidad.

Generalizando, consideremos un conjunto  $X$  en el que actúa un grupo  $G$ . Diremos que  $g \in G$  **fija a**  $x \in X$  si  $g \cdot x = x$ , donde  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  denota la acción. Un subconjunto  $A \subseteq X$  puede ser fijado por un  $g \in G$  en dos sentidos:

- $g$  **deja invariante a**  $A$  si  $g \cdot A := \{g \cdot a \mid a \in A\} \subseteq A$ .
- $g$  **fija a**  $A$  si  $g$  fija a cada elemento de  $A$ .

Finalmente, un subconjunto de  $X$  *fija* si el único elemento de  $G$  que lo fija es el neutro. En otras palabras, un conjunto  $A$  fija si y sólo si su **estabilizador**,  $G_A = \{g \in G \mid \forall a \in A, g \cdot a = a\}$ , es trivial. Cuando  $X$  es un “espacio geométrico”, el grupo que actúa en él frecuentemente se sobreentiende. Así, para un espacio afín usaremos el grupo de afinidades y para un espacio proyectivo el de proyectividades.

Veamos ejemplos de conjuntos que fijan:

En el plano con la acción de su grupo de isometrías, un conjunto de uno o dos puntos no fija: un conjunto de un punto tiene como estabilizador al grupo ortogonal  $O(2)$ , un conjunto de dos puntos tiene como estabilizador al grupo generado por la reflexión en la recta que los une. Un conjunto de tres puntos fija si y sólo si no son colineales. Cuando son colineales, la reflexión en la recta que los contiene es una isometría que los fija sin ser la identidad. Cuando no son colineales, fijan por un teorema básico sobre isometrías: una isometría está determinada por un triángulo y su imagen.

Hay toda una serie de teoremas de este tipo, teoremas que dicen cuantas restricciones es necesario ponerle a una función para que este determinada de manera única. De muchos de ellos podemos obtener resultados sobre conjuntos que fijan.

Por ejemplo, una transformación lineal de un espacio vectorial en si mismo está determinada por sus valores en cualquier base. Por lo tanto, en un espacio vectorial bajo la acción del grupo general lineal (que consta de las transformaciones lineales invertibles de dicho espacio en si mismo), toda base fija. Las bases no son los únicos conjuntos que fijan: los conjuntos que fijan son precisamente los conjuntos generadores. Entonces, las bases son los conjuntos minimales que fijan.

El teorema fundamental de la geometría proyectiva dice que una proyectividad en un espacio proyectivo  $n$ -dimensional está determinada por las imágenes de  $n + 2$  puntos en posición general. Esto nos dice que un conjunto de  $n + 2$  puntos en posición general fija al espacio proyectivo de dimensión  $n$ . También nos dice que esos conjuntos son minimales con la propiedad de fijar: dado un conjunto  $A$  de menos de  $n + 2$  puntos en posición general, podemos completarlo de dos maneras distintas, digamos  $A_1$  y  $A_2$ , a un conjunto de  $n + 2$  puntos en posición general. El teorema fundamental garantiza que hay una proyectividad que manda a  $A_1$  en  $A_2$  fijando a  $A$ .

Pero en los espacios proyectivos la situación es más complicada que en los espacios vectoriales: los conjuntos de  $n + 2$  puntos en posición general no son los únicos minimales que fijan a un espacio proyectivo de dimensión  $n$ . Para dar un ejemplo, consideremos al espacio proyectivo real de dimensión 3 como el espacio euclideo tridimensional junto con un plano al infinito. Los vértices de un octaedro regular forman un conjunto minimal que fija. Probar esto directamente es fácil notando que cuatro vértices coplanares del octaedro fijan al plano que generan. Alternativamente, podemos usar la siguiente caracterización de los conjuntos que fijan al proyectivo:

**Proposición 1.1.** *Un conjunto de puntos en un espacio proyectivo real de dimensión finita fija si y sólo si no está contenido en la unión de dos subespacios complementarios.*

**Demostración.** Sea  $A$  un conjunto de puntos proyectivos. Supongamos que  $A \subseteq L_1 \cup L_2$  con  $L_1$  y  $L_2$  dos subespacios complementarios. Consideremos la transformación lineal  $\lambda I_1 + \mu I_2$  donde  $\lambda$  y  $\mu$  son dos escalares distintos de 0 y distintos entre sí, e  $I_j$  denota la identidad en el subespacio vectorial correspondiente a  $L_j$ . Esta transformación lineal define una proyectividad que fija a  $L_1$  y a  $L_2$ , pero a ningún otro punto del espacio. Por lo tanto,  $A$  no fija.

Recíprocamente, supongamos ahora que  $A$  no fija y sea  $f$  una transformación lineal correspondiente a una proyectividad que fija a  $A$  y no es la identidad. Los vectores que representan puntos de  $A$  son todos vectores propios de  $f$ . Si el conjunto de vectores propios de  $f$  no genera, entonces  $A$  está contenido en un subespacio propio y, por ende, en la unión de dos subespacios complementarios. Si sí genera,  $f$  es diagonalizable. Como  $f$  no es un múltiplo de la identidad, debe tener al menos dos valores propios. Sea  $\lambda$  un valor propio cualquiera de  $f$ . Entonces, el subespacio de los vectores propios correspondientes a  $\lambda$  y el subespacio generado por los demás vectores propios definen dos subespacios proyectivos complementarios que contienen en su unión a  $A$ .  $\square$

**Observación 1.2.** Para simplificar la exposición hemos enunciado el resultado para un espacio proyectivo sobre los reales, pero el argumento funciona para cualquier campo con más de dos elementos. ¿Qué pasa en el caso restante? Como un espacio proyectivo sobre el campo de dos elementos es simplemente el conjunto de vectores distintos de cero un espacio vectorial, ahí un conjunto de puntos fija si y sólo si genera.

Ahora, traduciremos la proposición 1.1 al lenguaje matroidal. El conjunto de puntos de un espacio proyectivo tiene estructura de matroide. Esta estructura puede definirse de varias formas equivalentes, por ejemplo:

**Independientes.** Los conjuntos de puntos en posición general (es decir, que no tienen tres puntos colineales, cuatro coplanares, ...).

**Bases.** Los conjuntos de  $n + 2$  puntos en posición general (donde  $n$  es la dimensión del espacio proyectivo).

**Función de rango.**  $\text{rango}(A) = \dim_{\mathbb{P}} \langle A \rangle + 1$ .

**Clausura.** La clausura de un conjunto de puntos es el subespacio proyectivo que genera.

**Dependencia.**  $p$  depende de  $A$  si y sólo si el subespacio generado por  $A$  pasa por  $p$ .

Los conjuntos de puntos minimales que fijan al proyectivo se entienden mejor en el contexto de los matroides. Es conocido que un matroide de puntos proyectivos es conexo si y sólo si sus puntos no están contenidos en la unión de dos subespacios proyectivos ajenos. Por lo tanto, la proposición 1.1 se traduce en lo siguiente:

**Teorema 1.3.** *Un conjunto de puntos en un espacio proyectivo real de dimensión finita fija al subespacio que genera si y sólo si es conexo como matroide.*

Entonces, los conjuntos de puntos minimales que fijan son precisamente los matroides proyectivos **críticamente conexos**, es decir, los que son conexos y se desconectan al borrarles cualquier punto.

# Capítulo 2

## Preliminares matroidales

Suponemos que el lector está familiarizado con la teoría de matroides. Este capítulo no contiene una exposición detallada, más bien, aclara la terminología y reúne algunos resultados básicos que usaremos en el resto de la tesis.

Usaremos el lenguaje geométrico para hablar de matroides. Así, a los elementos de un matroide les llamamos **puntos**. La **dimensión** de un conjunto de puntos es su **rango** menos uno. Todos nuestros matroides serán de dimensión finita, aunque no necesariamente tendrán un número finito de puntos. La **codimensión** de un conjunto de puntos es igual a la dimensión del matroide entero menos la dimensión del conjunto. Los **planos** o **cerrados** de dimensión especial tienen nombre especial: los de dimensión 1 son **rectas** y los de codimensión 1 son **hiperplanos**. El **corango** de un conjunto de puntos es su cardinalidad menos su rango. Abusando del lenguaje, con frecuencia no distinguiremos un matroide del conjunto de sus puntos. Si  $A$  es un conjunto de puntos en un matroide, denotamos con  $\langle A \rangle$  a su **clausura**, el plano generado por  $A$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \{p \mid \text{rango}(A) = \text{rango}(A \cup p)\} \\ &= \bigcap \{F \mid F \text{ es un cerrado, } F \supset A\} \\ &= A \cup \{p \mid \text{hay un circuito } C \subset A \cup p \text{ tal que } C \ni p\}. \end{aligned}$$

Si  $p$  es un punto de un matroide  $M$ , denotamos con  $M - p$  al matroide que se obtiene **borrando**  $p$  de  $M$ , que tiene como puntos a todos los de  $M$  salvo  $p$  y en el que cada conjunto tiene el mismo rango que en  $M$ . Un **submatroide** de  $M$  es cualquiera que pueda obtenerse a partir de  $M$  por una serie de borrados. Está claro que el orden en que se borran los puntos no afecta el resultado: la función rango de un submatroide es simplemente la restricción de la de  $M$ . Entonces, escribimos  $M - N$ , para denotar al submatroide de  $M$  que se obtiene borrando los puntos de  $N$ .

La operación inversa a borrar un punto es la **extensión simple**. Si  $M' = M - p$ , decimos que  $M$  es una **extensión simple** de  $M'$  y escribiremos  $M = M' + p$ . La extensión se llama **libre** si  $p$  es **aislado**, es decir, si  $M'$  es un hiperplano de  $M$ .

Cuando  $M' = M - N$  para un conjunto de puntos  $N$ , también escribimos  $M = M' + N$ . Esto significa que usaremos el signo  $+$  para denotar la unión de conjuntos ajenos de puntos.

Una dificultad de la teoría de matroides es que no hay un “matroide universal”. Esto hace que frecuentemente se piense en un matroide como una estructura definida salvo isomorfismo. Esto tiene la consecuencia de que la notación  $M' + p$  (y también  $M' + N$ ) sea ambigua: un matroide  $M'$  en general tiene muchas extensiones no isomorfas. Uno debe especificar que relación tiene  $p$  con los puntos de  $M'$ , por ejemplo, diciendo que independientes en  $M'$  siguen siendo independientes al agregar  $p$ . Esta situación contrasta con la de matroides dados por conjuntos de puntos en el proyectivo: en ese contexto,  $M' + p$  denota un matroide bien definido, a saber, el matroide proyectivo asociado al conjunto de puntos  $M' \cup \{p\}$ . La diferencia es que en el caso del proyectivo los puntos “existen *a priori*” y cada punto “sabe” de cuales subconjuntos de  $M'$  depende y de cuales no.

Para tener este tipo de ventajas supondremos que hay un matroide “grande”  $\mathcal{M}$  que contiene a todos los puntos que podemos llegar a necesitar. Así,  $M + p$  denota *un* matroide en particular para cada punto  $p$ ; si  $p$  y  $q$  son dos puntos,  $M + p$  y  $M + q$  pueden ser o no isomorfos, pero nunca son iguales pues tienen distintos conjuntos de puntos. Gracias a  $\mathcal{M}$ , podemos dar un matroide especificando únicamente el conjunto  $X$  de sus puntos. Sus independientes son los de  $\mathcal{M}$  contenidos en  $X$ ; su función de rango es la de  $\mathcal{M}$  restringida a los subconjuntos de  $X$ .

Por ejemplo, cuando consideremos matroides gráficos, tomaremos como  $\mathcal{M}$  el matroide asociado a una gráfica completa con un número suficientemente grande de vértices. Cuando consideremos matroides de puntos en un espacio proyectivo,  $\mathcal{M}$  será, naturalmente, el matroide de *todos* los puntos del espacio.

Si  $M$  y  $N$  son dos matroides su unión es una **suma directa** si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- Un conjunto de puntos es circuito de  $M \cup N$  si y sólo si es circuito de  $M$  o de  $N$ .
- Un subconjunto de  $M \cup N$  es independiente si y sólo si es unión de un subconjunto independiente de  $M$  y uno de  $N$ .
- Para cualquier conjunto  $A \subseteq M \cup N$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A \cap M) + \text{rango}(A \cap N)$ .

Para indicar que la suma de dos matroides es directa escribimos  $M \oplus N$ . La igualdad  $\text{rango}(M \cup N) = \text{rango}(M) + \text{rango}(N)$  es necesaria y suficiente para que la suma de  $M$  y  $N$  sea directa. En general,  $M$  y  $N$  no tienen que ser ajenos para que su suma sea directa: podrían ser, por ejemplo, subespacios vectoriales complementarios y ambos tener al 0. Lo que si podemos garantizar es que  $\text{rango}(M \cap N) = 0$ , y que por lo tanto todos los puntos de  $M \cap N$  son lazos. En un matroide sin lazos, los sumandos directos *sí* deben ser ajenos. Por ejemplo, si  $M$  y  $N$  están dados por conjuntos de puntos en el espacio proyectivo, su suma es directa si y sólo si los subespacios proyectivos generados por  $M$  y  $N$  son ajenos.

Dos puntos de un matroide están **conectados** si hay un circuito del matroide que contiene a ambos. Estar conectados resulta ser una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se llaman componentes conexas. Cada matroide es la suma directa de sus componentes conexas. Un matroide se llama **conexo** si tiene sólo una componente. El estudio de la conexidad en matroides fue iniciado por Tutte en [7], donde prueba las afirmaciones anteriores.

**Proposición 2.1.** *Un matroide conexo con al menos 2 puntos no tiene lazos ni puntos aislados.*

**Demostración.** Si  $p$  es un punto aislado de  $M$ , entonces  $H = M - p$  es un hiperplano y  $M$  tiene la descomposición  $M = p \oplus H$ . Si  $q$  es un lazo de  $M$ ,  $q$  es el único circuito que contiene a  $q$ . Por lo tanto,  $q$  es una componente conexa de  $M$ .  $\square$

**Observación 2.2.** Nótese que tanto si  $p$  es aislado en  $M$  como si es lazo, tenemos que  $M = p \oplus (M - p)$ . La diferencia entre los dos casos es que cuando  $p$  es aislado,  $M - p$  es un hiperplano y en el otro caso no. Cuando  $p$  es un lazo, aunque la suma sea directa,  $p$  está en la clausura del otro sumando. Esto puede desconcertar: uno podría esperar que cuando  $M = M_1 \oplus M_2$ ,  $M_1$  y  $M_2$  esten obligados a ser planos de  $M$ . Casi es cierto, falla porque los lazos pertenecen a todos los planos. Los sumandos casi son cerrados:  $\langle M_i \rangle = M_i \cup L$ , donde  $L$  es el conjunto de lazos de  $M$ .

Por ejemplo, en un espacio vectorial  $U = V \oplus W$ , tenemos, matroidalmente,  $U = (V - 0) \oplus W$ . Aquí,  $V - 0$  no es un subespacio; el subespacio que genera es  $V$ . Esto está de acuerdo con el párrafo anterior pues 0 es el único lazo en un matroide lineal.

Afortunadamente para nosotros, la proposición anterior nos libra de lidiar con lazos en muchos casos.

**Proposición 2.3.** *Una extensión simple no libre de un matroide conexo es conexa, salvo cuando el punto agregado es un lazo.*

**Demostración.** Que  $M + p$  no sea una extensión libre significa que  $M$  no es un hiperplano, o sea, que  $p \in \langle M \rangle$ . Entonces, existe un circuito  $C$  que tiene a  $p$ . Si  $p$  no es un lazo,  $C$  debe conectar a  $p$  con algún punto del matroide conexo  $M$ .  $\square$

**Proposición 2.4.** *Sean  $p$  y  $q$  dos puntos de un matroide  $M$ . Si  $p$  es aislado en  $M - q$  y no es aislado en  $M$ , entonces  $q$  es aislado en  $M - p$ .*

**Demostración.** Si  $p$  es aislado en  $M - q$  pero no en  $M$ , tenemos que  $p \in \langle M - p \rangle - \langle M - \{p, q\} \rangle$ . Por la propiedad de intercambio de la clausura tenemos que  $q \in \langle M - q \rangle - \langle M - \{p, q\} \rangle$ .  $\square$

Llamémosle **inesencial** a un punto  $p$  de un matroide  $M$  si  $M - p$  es conexo y **esencial** si no es inessential. Un matroide conexo se llama **críticamente conexo** si todos sus puntos son esenciales. Un ejemplo obvio de un matroide críticamente conexo es un circuito. Abreviaremos *críticamente conexo* como *CC*. Para evitar discutir trivialidades, decretamos que un matroide CC debe tener dimensión al menos 1.

## Capítulo 3

# Subdivisiones y subdivisiones fantasmas

Describamos la operación básica que preserva la conexidad crítica. Sea  $M$  un matroide y  $\{a, b, p\}$  un 3-circuito tal que  $\{a, b\}$  es un 2-cocircuito. Diremos que el matroide  $M - p$  se obtiene a partir del matroide  $M - \{a, b\}$  **subdividiendo** el punto  $p$ . Elegimos este nombre porque en los matroides gráficos esto corresponde a la operación usual de subdividir una arista. Diremos también que  $N$  es una **subdivisión** de  $M$  si  $N$  se obtiene de  $M$  subdividiendo algún punto.

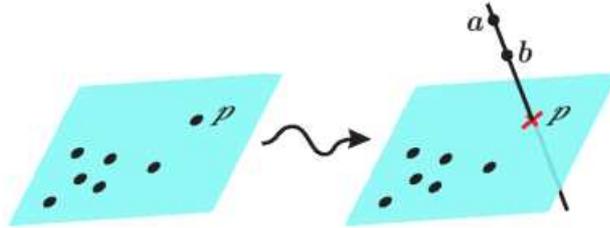


Figura 3.1.

Es fácil ver que cualquier circuito de  $M - p$  se obtiene de un circuito de  $M - \{a, b\}$  reemplazando al punto  $p$  por los puntos  $\{a, b\}$ . Por lo tanto,  $M - p$  es conexo si y sólo si  $M - \{a, b\}$  es conexo.

Para cualquier  $q \in M - \{a, b, p\}$ ,  $M - \{p, q\}$  es la subdivisión en  $p$  de  $M - \{a, b, q\}$ . Entonces cualquier  $q \in M - \{a, b, p\}$  es esencial en  $M - p$  si y sólo si es esencial en  $M - \{a, b\}$ . ¿Qué hay de  $a$  y  $b$  los puntos “nuevos” de la subdivisión? Nunca son esenciales: en  $M - \{a, p\}$ ,  $b$  es un punto aislado. Hemos demostrado las siguientes dos proposiciones.

**Proposición 3.1.** *Sea  $N$  una subdivisión de  $M$ . Entonces,  $M$  es conexo si y sólo si  $N$  es conexo.*

**Proposición 3.2.** *Cualquier subdivisión de un matroide CC es CC.*

Estas proposiciones aparecieron por primera vez en [3].

**Observación 3.3.** Podríamos haber definido la subdivisión de  $M$  en  $p$ , como el matroide cuyo conjunto de puntos es  $M + q$  (donde  $q$  es un punto nuevo) y cuyos circuitos se obtienen como se sugiere arriba, es decir, conservando los circuitos de  $M$  que no tienen a  $p$  y agregando  $q$  a aquellos circuitos de  $M$  que sí tienen a  $p$ . No usaremos esta definición puesto que no es compatible con la convención de considerar a todos los matroides como submatroides de un matroide universal apropiado. En esta definición  $p$  cambia de papel (i.e., cambia de circuitos). Intuitivamente,  $p$  se mueve: se sale del plano de  $M$ , y  $q$  es un punto nuevo sobre la recta que une al viejo  $p$  con el nuevo. En la definición (enteramente isomorfa) que adoptamos arriba, para subdividir en  $p$  debemos encontrar *dos* puntos nuevos  $a$  y  $b$ . Estos puntos deben estar sobre una recta por  $p$  que salga del plano de  $M$ . La subdivisión se obtiene cambiando a  $p$  por  $\{a, b\}$ .

La segunda operación que usaremos para generar matroides CC es una modificación de la primera. Para definirla necesitamos el concepto de **punto fantasma**.

Cuando vemos algunos matroides proyectivos nos da la sensación de que faltan algunos puntos:

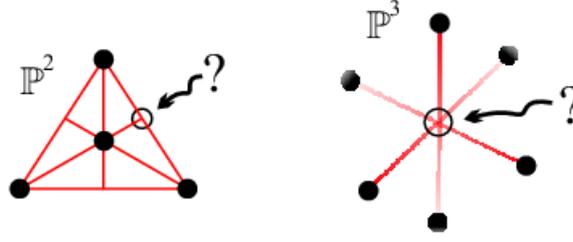


Figura 3.2.

Podemos caracterizar los “puntos faltantes” que nos interesan en términos matroidales; esto probablemente es la definición clave de este trabajo. Sea  $M' = M + p$  un extensión simple y no libre. Si  $p$  es el único punto inesencial de  $M'$ , diremos que  $M'$  es una *extensión fantasma* de  $M$  y que  $p$  es un **punto fantasma** de  $M$ . Si ahora subdividimos a  $p$  en  $M'$ , obtenemos una **subdivisión fantasma** de  $M$ . Nótese que las subdivisiones fantasma son extensiones por dos puntos.

**Proposición 3.4.** *Si un matroide tiene un punto fantasma, entonces es CC.*

**Demostración.** Sea  $p$  un punto fantasma de  $M$  y sea  $M' = M + p$ . Como  $p$  es inesencial en  $M'$ ,  $M = M' - p$  es conexo. Sea  $q$  un punto arbitrario de  $M$ . Como  $p$  es el único punto inesencial de  $M'$ ,  $M' - q = M + p - q$  es desconexo. Supongamos que  $M - q$  es conexo. Como  $M' - q$  es una extensión simple desconexa de  $M - q$ ,  $p$  es aislado en  $M' - q$  (proposición 2.3). Como  $p$  no es aislado en  $M'$ , por la proposición 2.4,  $q$  es aislado en  $M' - p = M$ . Esto contradice que  $M$  es conexo (por la proposición 2.1).  $\square$

**Proposición 3.5.** *Cualquier subdivisión fantasma es CC.*

**Demostración.** Sea  $M' = M + p$  una extensión fantasma de  $M$ . Sea  $N = M + \{a, b\}$  la subdivisión fantasma de  $M$  en  $p$ . Por la proposición anterior,  $M$  es CC. Como  $p$  no es aislado en  $M'$ ,  $M'$  es conexo (proposición 2.3), y como  $N$  es subdivisión de  $M'$ , por la proposición 3.1,  $N$  también es conexo.

Nos falta probar que para cualquier punto  $x$  en  $N$ , el matroide  $N - x$  es desconexo.

El matroide  $N - a$  tiene un lazo en  $b$  y por lo tanto es desconexo. Análogamente,  $N - b$  es desconexo. Sea  $q$  un punto arbitrario de  $M$ . Como  $p$  es el único punto inesencial de  $M'$ ,  $M' - q$  es desconexo. Entonces,  $N - q$  es desconexo por ser una subdivisión de  $M' - q$  (proposición 3.1).  $\square$

¿Cómo se invierten las operaciones de subdivisión y subdivisión fantasma? Observemos que cada una introduce dos puntos nuevos en el matroide; si éstos son  $a$  y  $b$ ,  $\{a, b\}$  es un 2-cocircuito del matroide  $M$  que resulta de subdividir. Entonces si queremos aplicar alguna subdivisión a la inversa, debemos empezar por buscar 2-cocircuitos. Afortunadamente, es bien conocido que cualquier matroide CC tiene al menos un 2-cocircuito. Para una demostración, ver [3], [6] o [8]; para información histórica ver [4], página 49.

Para poder describir la operación inversa a la subdivisión (no fantasma), recordemos la **contracción**. La contracción de  $M$  por  $a$ , uno de sus puntos, se define como el matroide  $M/a$  cuyos puntos son los de  $M - a$  y en el cual un subconjunto  $I$  es independiente si y sólo si  $I + a$  es independiente en  $M$ . Cuando a  $M/a$  lo subdividimos en  $b$ , lo que hacemos es quitarle  $b$  y poner en su lugar un par de puntos  $p$  y  $q$ . Está claro que la función que fija a  $M - \{a, b\}$  y envía a  $p, q$  en  $a, b$  respectivamente es un isomorfismo entre la subdivisión de  $M/a$  y el matroide original  $M$ .

Pero, por nuestra convención de considerar a todos los matroides que usamos como submatroides del gran matroide  $\mathcal{M}$ , insistimos en que la operación inversa dé *exactamente*  $M$ , no algo meramente isomorfo. El problema es análogo al de la definición de subdivisión comentada en la observación 3.3.

La definición de la contracción es enemiga de considerar a los matroides como submatroides de un matroide fijo. Los matroides  $M - a$  y  $M/a$  no son isomorfos pero tienen el mismo conjunto de puntos. Necesitamos encontrar un conjunto de puntos  $N$  tal que el correspondiente submatroide de  $\mathcal{M}$  sea isomorfo a  $M/a$ .

Pensemos en el caso de los matroides proyectivos. Si  $M$  es proyectivo,  $M/a$  es isomorfo al matroide de  $\pi(M - a)$  donde  $\pi$  denota la proyección desde  $a$  sobre un hiperplano cualquiera que no pase por  $a$ . Cualquier hiperplano sirve y en general no hay una manera canónica de elegirlo. Pero en el caso que nos interesa, cuando  $\{a, b\}$  es un 2-cocircuito de  $M$ ,  $\langle M - \{a, b\} \rangle$  no pasa por  $a$ . Agradecidos, elegimos proyectar sobre ese hiperplano.

Podemos imitar esto en el caso general siempre y cuando  $\mathcal{M}$  tenga un único punto  $p$  en la intersección de  $\langle M - \{a, b\} \rangle$  y la recta  $\langle \{a, b\} \rangle$  (ambas cerraduras tomadas en  $\mathcal{M}$ ). Si esto ocurre, diremos que  $p$  es la **proyección** de  $\{a, b\}$  y que  $M + p - \{a, b\}$  es el **cociente** de  $M$  por el 2-cocircuito  $\{a, b\}$ . El cociente es la operación inversa a la subdivisión.

Está claro que la existencia de los cocientes depende de que matroide  $\mathcal{M}$  se tome como universo. Cuando existe el cociente, es isomorfo a una contracción.

La subdivisión fantasma es una extensión fantasma seguida de una subdivisión, así que se puede invertir con un cociente seguido de un borrado. Evidentemente esto es simplemente borrar el 2-cocircuito. Cuidado: no cualquier borrado de un 2-cocircuito es inverso a alguna subdivisión fantasma, sólo lo es si la proyección del cocircuito es un punto fantasma del resultado.



## Capítulo 4

### Todos los matroides críticamente conexos

Ahora mostraremos que la subdivisión y la subdivisión fantasma son suficientes para generar a todos los matroides críticamente conexos.

**Lema 4.1.** *Si  $\{a, b\}$  es un cocircuito de  $M$  y éste es CC, entonces para cualquier  $q \in M - \{a, b\}$  el matroide  $M + p - \{a, b, q\}$  es desconexo. (Aquí  $p$  es la proyección de  $\{a, b\}$ .)*

**Demostración.** Sea  $N = M - \{a, b\}$ . Tenemos que probar que  $N + p - q$  es desconexo.

Si  $p \notin \langle N - q \rangle$ , entonces  $p$  está aislado en  $N + p - q$  y terminamos.

Si  $p \in \langle N - q \rangle$ , entonces  $\{a, b\}$  es un cocircuito de  $M - q$  y  $N + p - q$  es su cociente por  $\{a, b\}$ . Como  $M - q$  es desconexo, también  $N + p - q$  lo es (proposición 3.2).  $\square$

**Proposición 4.2.** *Si  $\{a, b\}$  es un cocircuito de  $M$  y éste es CC, entonces, o bien el cociente de  $M$  por  $\{a, b\}$  es CC, o bien la proyección de  $\{a, b\}$  es un punto fantasma de  $M - \{a, b\}$ .*

**Demostración.** Sea  $p$  la proyección de  $\{a, b\}$  y sea  $N = M - \{a, b\}$ . Como  $M$  es una subdivisión de  $N + p$ , tenemos que  $N + p$  es conexo (proposición 3.2). Hay dos casos:

1.  $N$  es conexo. En este caso, por el lema,  $p$  es el único punto inesencial de  $N + p$ . Esto es, el punto  $p$  es un punto fantasma de  $N$ .
2.  $N$  es desconexo. En este caso, de nuevo por el lema,  $N + p$  es CC.  $\square$

**Teorema 4.3.** *Los matroides críticamente conexos son exactamente aquellos que pueden obtenerse a partir de un 3-circuito por medio de subdivisiones y subdivisiones fantasma.*

**Demostración.** El único matroide CC de dimensión 1 es el 3-circuito.

Supongamos inductivamente que el teorema es cierto para matroides de dimensión  $d$ . Por las proposiciones 3.2 y 3.5, cualquier matroide de dimensión  $d + 1$  que se obtenga por medio de una subdivisión o una subdivisión fantasma a partir de un matroide CC de dimensión  $d$ , también es CC.

Recíprocamente, si  $M$  es un matroide CC de dimensión  $d + 1$ , sabemos que debe tener un 2-cocircuito. Por la proposición anterior,  $M$  es subdivisión o subdivisión fantasma de un matroide de dimensión  $d$ .  $\square$

Este teorema está perfectamente adaptado a la tarea de demostrar propiedades de los matroides CC por inducción.

A pesar de ser idóneo para pruebas inductivas, este teorema tiene un inconveniente práctico: usarlo para mostrar que un matroide dado es CC es muy tedioso. El matroide debe ser construido muy poco a poco; para ésto sería preferible una operación para construir un nuevo matroide CC a partir de dos más pequeños. A continuación describiremos una de tales operaciones.

Considere dos planos  $A$  y  $B$  en un matroide  $M$  que no tiene puntos paralelos. Diremos que  $\{A, B\}$  es un **2-corte** de  $M$  si  $A \cup B = M$  y  $\text{rango}(A) + \text{rango}(B) = \text{rango}(M) + 1$ . Por la semimodularidad de la función de rango, cualquier 2-corte  $\{A, B\}$  debe cumplir  $\text{rango}(A \cap B) \leq 1$ . Diremos, naturalmente, que  $A \cap B$  es la **intersección** del 2-corte  $\{A, B\}$ . Como  $M$  no tiene puntos paralelos, entonces  $\text{rango}(A \cap B) \leq 1$  implica que la intersección es vacía o de un solo punto  $p$ . Diremos que un 2-corte es **completo** si  $A \cap B$  es un punto que no es lazo.

**Proposición 4.4.** *Si  $\{A, B\}$  es un 2-corte completo de un matroide conexo  $M$  y  $A \cap B = p$ , entonces cualquier circuito que tiene a  $p$  está contenido en uno de  $A$  y  $B$ .*

**Demostración.** Consideremos la contracción  $M' = M/p$  donde  $p = A \cap B$ . Recordemos que la función rango de una contracción está dada por

$$\text{rango}_{M'}(T) = \text{rango}_M(T + p) - 1.$$

Sea  $A'$  el submatroide de  $M'$  dado por  $A - p$  y  $B'$  el dado por  $B - p$ . Calculamos fácilmente que  $\text{rango}(A') + \text{rango}(B') = \text{rango}(M')$ , de donde  $M' = A' \oplus B'$ . Si  $C$  es un circuito de  $M$  que tiene a  $p$ ,  $C - p$  es un circuito de  $M'$ , por lo que debe estar contenido en  $A'$  o en  $B'$ .  $\square$

**Lema 4.5.** *Si  $\{A, B\}$  es un 2-corte completo de un matroide conexo  $M$  y  $A \cap B = p$ , entonces  $M - p$  es conexo.*

**Demostración.** Los puntos de  $M - p$  son de dos tipos: los que están en  $A$  y los que están en  $B$ . Para ver que  $M - p$  es conexo, basta probar que cualesquiera dos puntos de distinto tipo están conectados (dos puntos del mismo tipo están conectados porque ambos están conectados con cualquier punto del otro tipo). Sean  $x$  y  $y$  dos puntos de  $M - p$ , con  $x \in A$ ,  $y \in B$ . Como  $M$  es conexo, existe un circuito  $C$  que contiene tanto a  $x$  como a  $y$ . Si  $C$  incluyera a  $p$ ,  $C$  estaría totalmente contenido en  $A$  o en  $B$ , lo cual es imposible. Por lo tanto,  $p \notin C$  y  $C$  es un circuito de  $M - p$  que conecta a  $x$  y  $y$ .  $\square$

**Corolario 4.6.** *Cualquier 2-corte de un matroide CC tiene intersección vacía.*

Si  $\{A, B\}$  es un 2-corte de  $M$  y  $A \cap B$  es vacío, existe una extensión simple  $M + p$  (única salvo por el nombre del nuevo punto) en la que  $\{A + p, B + p\}$  es un 2-corte completo. Intuitivamente, añadimos el punto faltante en la intersección. Formalmente, podemos definir  $M + p$  como el matroide cuyos circuitos son los de  $M$  y los de la forma  $A' + p$  o  $B' + p$  donde  $A' \subset A$ ,  $B' \subset B$  y  $A' \cup B'$  es un circuito de  $M$ .

Sea  $\{A, B\}$  un 2-corte de  $M$ . Si  $A \cap B$  es vacío, sea  $p$  como en el párrafo anterior, si no, sea  $A \cap B = p$ . En cualquier caso diremos que  $p$  es la **proyección** de  $A$  sobre  $B$  y que el matroide  $A \cup p$  es el **cociente** de  $M$  por  $B$  (no escribimos  $A + p$ , pues en un caso la unión no es ajena). Está claro que si  $q$  es cualquier punto de  $B$ ,  $A \cup p$  es isomorfo a la contracción  $M/(B - q)$ . Nótese que  $\{a, b\}$  es un 2-cocircuito precisamente cuando  $\{\{a, b\}, M - \{a, b\}\}$  es un 2-corte y que las definiciones que acabamos de dar para proyección y cociente son generalizaciones de las previas. Siguiendo en esta línea, tenemos la siguiente generalización de la proposición 3.1:

**Proposición 4.7.** *Sea  $\{A, B\}$  un 2-corte de  $M$  y sea  $p$  la proyección de  $A$  sobre  $B$ . Entonces  $M$  es conexo si y solo si  $A \cup p$  y  $B \cup p$  lo son.*

**Demostración.** Si  $A \cup p$  es desconexo, lo podemos escribir como  $(A_1 + p) \oplus A_2$ , y tendríamos que  $M = (B + A_1) \oplus A_2$  es desconexo. Por lo tanto, si  $M$  es conexo, tanto  $A \cup p$  como  $B \cup p$  lo son.

Ahora, supongamos que tanto  $A \cup p$  como  $B \cup p$  son conexos. Nótese que si  $A \cap B = p$ ,  $M$  es conexo simplemente porque  $p$  está conectado con cada punto de  $M - p = (A - p) + (B - p)$ . ¿Qué sucede cuando  $A \cap B = \emptyset$ ? Entonces,  $\{A + p, B + p\}$  es un 2-corte de  $M + p$ . Por el caso que ya vimos,  $M + p$  es conexo. Por el lema 4.5,  $M$  es conexo.  $\square$

**Corolario 4.8.** *Sea  $\{A, B\}$  un 2-corte de  $M$  con intersección vacía y sea  $p$  la proyección de  $A$  sobre  $B$ . Entonces  $M$  es CC si y sólo si*

- i.  $A + p$  es conexo y todo  $a \in A$  es esencial en  $A + p$ .*
- ii.  $B + p$  es conexo y todo  $b \in B$  es esencial en  $B + p$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $M$  es CC. Por la proposición anterior,  $A + p$ . Si  $A + p - a$  fuera conexo, por la proposición anterior,  $M - a$  sería conexo. Esto prueba *i*, la prueba de *ii* es análoga.

Supongamos que las condiciones  $i$  y  $ii$  se cumplen. Por la proposición anterior,  $M$  es conexo. Para cualquier  $a \in A$ ,  $A + p - a$  es desconexo y por la proposición anterior,  $M - a$  también. Análogamente, para  $b \in B$ ,  $M - b$  es desconexo.  $\square$

Hay una formulación alternativa de las condiciones del corolario que es bastante útil. Supongamos que  $A$  cumple la condición  $i$ . Solo hay dos posibilidades:

- Si  $p$  también es esencial en  $A + p$ , entonces  $A + p$  es CC.
- Si  $p$  no es esencial en  $A + p$ , entonces  $A$  es CC y  $p$  es un punto fantasma de  $A$ .

Ahora está claro como construir matroides CC nuevos. Para dos matroides  $A + p$  y  $B + p$  que tienen solo a  $p$  en común, definimos  $A \otimes B$  como el matroide con puntos  $A + B$  y circuitos los de  $A$ , los de  $B$  y los de conjuntos de la forma  $A' + B'$  donde  $A' + p$  y  $B' + p$  son circuitos de  $A + p$  y  $B + p$  respectivamente.

**Teorema 4.9.** *El matroide  $A_1 \otimes A_2$  es CC si y solo si para cada  $i$ ,  $A_i + p$  es CC o  $p$  es un punto fantasma de  $A_i$ . Cualquier matroide CC se puede obtener con una serie de operaciones  $\otimes$  a partir de 3-circuitos.*

**Demostración.** El primer enunciado es una reformulación del corolario 4.8. El segundo es claro a partir del teorema 4.3 cuando notamos que si  $B + p$  es un 3-circuito,  $A \otimes B$  es una subdivisión o una subdivisión fantasma de  $A$ .  $\square$

## 4.1 Todos los fijadores minimales

En el primer capítulo motivamos el problema de caracterizar los matroides críticamente conexos planteándolo como generalización del problema de caracterizar los conjuntos minimales de puntos que fijan el subespacio proyectivo que generan. Ahora, armados de los resultados de este capítulo, podremos caracterizar los fijadores minimales.

Para obtener un teorema puramente proyectivo, sin referencia alguna a matroides, debemos poder expresar los dos tipos de subdivisión en términos de puntos en el proyectivo. La subdivisión normal no es problema: la figura 3.1 muestra como se hace. Para subdividir  $M$  en  $p$ , simplemente tomamos una recta por  $p$  que intersecte al subespacio proyectivo  $\langle M \rangle$  en un solo punto<sup>4.1</sup> y elegimos sobre ella un par de puntos,  $a$  y  $b$ , que no sean  $p$ . La subdivisión es  $M - p + \{a, b\}$ .

La subdivisión fantasma es un poco más problemática puesto que no toda extensión simple de un matroide proyectivo es proyectivo. Remediamos esto simplemente restringiéndonos a puntos fantasmas que estén presentes en el espacio proyectivo.

El teorema análogo a 4.3 para fijadores minimales es:

**Teorema 4.10.** *Los fijadores minimales son exactamente aquellos conjuntos de puntos que se pueden obtener a partir de tres puntos colineales por medio de subdivisiones y subdivisiones fantasma.*

Desafortunadamente este teorema no es estrictamente un caso particular del teorema para matroides CC: hemos restringido las subdivisiones fantasmas, de modo que las operaciones que tenemos ahora podrían “no alcanzar” para formar todos los bloques minimales.

(En la otra dirección no tenemos problema: nuestras subdivisiones para conjuntos de puntos en el proyectivo son *algunas* de las que permitimos para matroides. Entonces, como caso particular del teorema 4.3, todo conjunto de puntos obtenido por medio de subdivisiones a partir de tres puntos colineales es un fijador minimal.)

Afortunadamente, las subdivisiones fantasmas utilizadas en la demostración del teorema 4.3 para la construcción de un matroide CC dado tienen una relación íntima con éste: el último paso en la construcción de un matroide  $M$  es subdividir  $M - \{a, b\}$  por la proyección del 2-cocircuito  $\{a, b\}$ . Así, para adaptar el teorema al proyectivo basta observar que la proyección de un 2-cocircuito *realmente* es un punto del espacio proyectivo: el punto de intersección de la recta  $\langle a, b \rangle$  con el plano  $\langle M - \{a, b\} \rangle$ .

4.1. Si es necesario, metemos primero a  $M$  en un espacio proyectivo de dimensión mayor.

## 4.2 Todos los bloques minimales

Dada una gráfica podemos construir su **matroide de ciclos**: los puntos del matroide son las aristas y los circuitos del matroide son los ciclos. Ese matroide es conexo si y sólo si la gráfica es biconexa. Las gráficas biconexas se conocen también (y más brevemente) como **bloques**. Los matroides gráficos CC corresponden a bloques que dejan de serlo al perder cualquier arista. Como uno esperaría, éstos se conocen como bloques minimales. El estudio de los bloques minimales parece haber iniciado en un artículo de Dirac [1] (ver también [5]). Con nuestro teorema 4.3, podemos dar una caracterización de los bloques minimales.

Imitando la sección anterior, adaptaremos el teorema 4.3 al caso de los bloques minimales.

Primero, expresamos los dos tipos de subdivisión en términos de gráficas solamente. La subdivisión normal no es problema: de hecho recibe su nombre por las gráficas; subdividir una arista es “ponerle un vértice nuevo en medio”, o sea, sustituirla por una trayectoria de dos aristas pasando por un vértice nuevo.

Nuevamente debemos restringir la clase de puntos fantasma. Para esto, acordemos que un par de vértices *no* adyacentes en una gráfica es una **inarista**. De todos los puntos que podemos concebir agregarle a un matroide gráfico, las inaristas son los que conservan gráfico al matroide<sup>4.2</sup>. Definimos entonces una **arista fantasma** de un bloque  $G$  como una inarista  $p$  tal que para toda arista  $a \in G$ ,  $G + p - e$  no es bloque. Ahora podemos definir una subdivisión fantasma para gráficas: agregar una arista fantasma y subdividirla.

(Otra manera de llegar a esta definición para la subdivisión fantasma es pensar que una gráfica  $G$  es una subgráfica de una gráfica completa  $K$ . Entonces, el matroide de ciclos de  $G$  es submatroide del matroide  $\mathcal{M}$  correspondiente a  $K$ . Ahora, cuando busquemos puntos fantasmas para subdividir matroides CC, nos restringimos a puntos de  $\mathcal{M}$ , así como en la sección anterior nos restringimos a puntos del espacio proyectivo.)

El teorema 4.3 trasladado a este contexto queda así:

**Teorema 4.11.** *Los bloques minimales son exactamente aquellas gráficas que se pueden obtener a partir de un triángulo por medio de subdivisiones y subdivisiones fantasma.*

Para probar este teorema basta ver que podemos elegir los 2-cocircuitos usados en la prueba del teorema 4.3 de manera que sus proyecciones sean inaristas. Afortunadamente, un teorema de Dirac [1] dice que cualquier bloque minimal tiene al menos un vértice  $v$  de grado 2. Las dos aristas incidentes con  $v$ , digamos  $uv$  y  $vw$ , son un 2-cocircuito cuya proyección es la inarista  $\{v, w\}$ .

En [2] Hedetniemi prueba que cualquier bloque minimal se puede obtener a partir de un triángulo con subdivisiones de aristas e inaristas y observa que no cualquier subdivisión de un bloque minimal por una inarista da como resultado un bloque minimal, pero no da un criterio para saber cuales inaristas son las que sirven para este propósito. El teorema anterior resuelve la cuestión.

---

4.2. Aquí hay una pequeña imprecisión: también mantiene gráfico a un matroide agregar un punto que corresponda a una arista que une dos vértices nuevos o uno viejo y uno nuevo. Esto también es de alguna manera una inarista puesto que los vértices nuevos podemos agregarlos aislados a la gráfica original sin cambiar su matroide.

# Parte II

## Aplicaciones



# Capítulo 5

## Números de Helly

A este capítulo le tomará tiempo parecer aplicación de los matroides CC, le pido al lector un poco de paciencia. Antes de llegar a los matroides CC necesitamos dar un breve paseo por los números de Helly. Empecemos con el teorema clásico de Helly:

**Teorema 5.1.** *Si  $A_1, A_2, \dots, A_m$  son más de  $n$  subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$  tales que cualesquiera  $n + 1$  de ellos tienen intersección no vacía, entonces la intersección de todos es no vacía.*

Inspirado en este teorema, se dice que una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos es  $k$ -Helly si tiene intersección no vacía cualquier subfamilia  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  con  $|\mathcal{G}| \geq k$  en la que cada  $k$  miembros tienen intersección no vacía. Con esta terminología, el teorema de Helly se enuncia como *la familia de subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$  es  $(n + 1)$ -Helly.*

Es claro que si una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos es  $k$ -Helly también es  $k'$ -Helly para cualquier  $k' > k$ . Así el conjunto de valores de  $k$  para los  $\mathcal{F}$  es  $k$ -Helly o bien es vacío, o bien es de la forma  $\{k | k \geq n\}$ . En el segundo caso diremos que  $h(\mathcal{F}) = n$  es el número de Helly de  $\mathcal{F}$ .

Estudiar el número de Helly de familias arbitrarias de conjuntos resulta poco productivo, simplemente se necesita algo más de estructura. ¿Qué clase de restricción sobre las familias podemos utilizar? Los conjuntos convexos son los cerrados del operador de clausura convexa, así que una posibilidad prometedora son las familias de cerrados de algún operador de clausura. (La terminología y propiedades de los operadores de clausura que usaremos se encuentran en el apéndice A.)

Para los operadores de clausura en general es necesario tener un poco de cuidado en la definición de la propiedad de Helly. El problema es que podría no haber cerrados de intersección vacía, por ejemplo, según el operador de clausura lineal de un espacio vectorial, todos los cerrados contienen al vector cero. Esta situación no es grave: en el apéndice A se demuestra que para un operador de clausura estrechamente relacionado con el primero el vacío sí es cerrado. Alternativamente se puede cambiar en la definición de la propiedad de Helly la noción de “intersección vacía” por la de “intersección igual a la clausura del vacío”. (La clausura del vacío es el cerrado mínimo.)

Es posible generalizar aún más: podemos olvidarnos de las familias de conjuntos y utilizar ordenes parciales generales. Para poder definir el número de Helly de un orden parcial, necesitamos que tenga un elemento mínimo (que denotaremos 0) y que cualquier subconjunto finito y no vacío tenga ínfimo. Los ordenes parciales que cumplen esas dos condiciones son las semi-retículas inferiores con mínimo. En uno de estos ordenes, el análogo de tener intersección no vacía es que el ínfimo no sea 0; con este cambio podemos conservar las definiciones previas. Para la retícula de cerrados de un operador de clausura, las definiciones de este párrafo coinciden con las del anterior.

Desde luego, no todas las semi-retículas inferiores con mínimo tienen número de Helly, pero por lo menos tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.2.** *Sea  $P$  una semi-retícula inferior con elemento mínimo. Si cualquier cadena de  $P$  tiene longitud a lo más  $n$ , entonces  $P$  es  $n$ -Helly.*

**Demostración.** Si  $n = 1$ ,  $P = \{0\}$  que es trivialmente 1-Helly.

Supongamos que  $n > 1$  y que  $a_1, a_2, \dots, a_m \in P$  (con  $m \geq n$ ) son tales que cualesquiera  $n$  de ellos tienen ínfimo distinto de 0. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a_1$  es minimal entre los  $a_i$ . Consideremos los elementos  $a_1 \wedge a_2, a_1 \wedge a_3, \dots, a_1 \wedge a_m$ .

Si son menos de  $n - 1$  diferentes, podemos elegir  $n$  de los  $a_i$  de manera que su ínfimo sea el de *todos* los  $a_i$ , de modo que  $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \neq 0$ .

Si hay al menos  $n - 1$  diferentes, notemos que cada  $n - 1$  de ellos tienen ínfimo distinto de 0 y todos están en  $\{x \in P \mid x < a_1\}$  que es una semi-retícula inferior en la que toda cadena tiene longitud a lo más  $n - 1$ . Por inducción, su ínfimo no es 0.  $\square$

**Observación 5.3.** Esta cota al número de Helly es la mejor posible: si  $P$  es el conjunto de subespacios afines de  $\mathbb{R}^n$  (incluyendo al vacío), la longitud máxima de una cadena es  $n + 1$  y  $h(P) = n + 1$ . (Por ejemplo, para  $n = 2$ , que de un conjunto de rectas cualesquier trío concurra asegura que todas concurren, pero esto es falso cambiando “trío” por “par”).

## 5.1 La utilidad del corazón

Sea  $L$  una retícula completa. En el apéndice A probamos que  $L$  se puede ver como la retícula de cerrados de un conjunto  $X$  con un operador de clausura  $A \mapsto \bar{A}$ , incluso podemos suponer (y de hecho supon-dremos) que el vacío es cerrado.

Para  $A \subset X$  definimos el **corazón** de  $A$  como  $C(A) = \bigcap_{x \in X} \overline{A - x}$ . Nótese que  $C(A) \subset \bar{A}$ . Tenemos que<sup>5.1</sup>  $C(\emptyset) = \emptyset$ . Para  $A \neq \emptyset$  podemos simplificar la definición a  $C(A) = \bigcap_{a \in A} \overline{A - a}$ , pues los intersec-tandos que quitamos son todos iguales a  $\bar{A}$ . El corazón es monótono: si  $A \subset B$ , entonces

$$C(A) = \bigcap_{x \in X} \overline{A - x} \subset \bigcap_{x \in X} \overline{B - x} = C(B).$$

La principal utilidad del corazón será permitir un cálculo más simple del número de Helly. Con ese fin definimos  $h^*(X) := \max\{|A| : A \subset X, C(A) = \emptyset\}$ . Escogimos la notación  $h^*$  por el siguiente teorema.

**Teorema 5.4.** *Siempre que ambos números sean finitos,  $h(X) = h^*(X)$ .*

**Demostración.** Sea  $A$  tal que  $C(A) = \emptyset$ . Entonces,  $\mathcal{T} = \{\overline{A - a} \mid a \in A\}$  es una familia de cerrados en la que cualesquiera  $|A| - 1$  tienen intersección no vacía, pero  $\bigcap \mathcal{T} = \emptyset$ . Luego,  $X$  no es  $(|A| - 1)$ -Helly, o sea,  $h(X) \geq |A|$ . Por lo tanto,  $h(X) \geq h^*(X)$ .

Como  $X$  no es  $(h(X) - 1)$ -Helly, existe alguna familia  $\mathcal{T}'$  de cerrados tal que cualesquiera  $h(X) - 1$  de sus elementos tienen intersección no vacía pero  $\bigcap \mathcal{T}' = \emptyset$ . Si cualesquiera  $h(X)$  elementos de  $\mathcal{T}'$  tuvieran intersección no vacía, como  $X$  sí es  $h(X)$ -Helly, tendríamos que  $\bigcap \mathcal{T}' \neq \emptyset$ . Por lo tanto, existe  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$  con  $|\mathcal{T}| = h(X)$  y  $\bigcap \mathcal{T} = \emptyset$ .

Para cada  $T \in \mathcal{T}$ , sea  $x_T \in \bigcap (T - T)$  arbitrario. Como  $\bigcap \mathcal{T} = \emptyset$ , no puede haber dos  $x_T$  iguales, de modo que  $A := \{x_T \mid T \in \mathcal{T}\}$  tiene cardinalidad  $h(X)$ . Para cada  $T \in \mathcal{T}$ , sucede que  $A - x_T \subset T$ , por lo que  $C(A) = \bigcap \overline{A - x_T} \subset \bigcap T = \emptyset$ . Por lo tanto,  $h(X) \leq h^*(X)$ .  $\square$

El teorema anterior es una herramienta poderosa para calcular números de Helly. Por ejemplo, lo podemos usar para probar el teorema clásico de Helly:

Tenemos que encontrar los conjuntos más grandes cuyo corazón es vacío en el operador de clausura convexa. El teorema de Radon dice que un conjunto  $A$  con  $n + 2$  o más puntos tiene una partición  $A = A_1 + A_2$  tal que las clausuras convexas de  $A_1$  y  $A_2$  se intersecan. Uno de tales conjuntos no puede tener corazón vacío pues  $\langle A_1 \rangle \cap \langle A_2 \rangle \subset C(A)$ ; en efecto,  $\langle A_1 \rangle \cap \langle A_2 \rangle \subset \langle A_2 \rangle \subset \bigcap_{a \in A_1} \langle A - a \rangle$  y análogamente  $\langle A_1 \rangle \cap \langle A_2 \rangle \subset \bigcap_{a \in A_2} \langle A - a \rangle$ . Por lo tanto,  $h^*(\text{convexos de } \mathbb{R}^n) \leq n + 1$ . Como los vértices de un simplejo tienen corazón vacío (incluso según el operador de clausura afín),  $h^*(\text{convexos de } \mathbb{R}^n) = n + 1$ . Por el teo-rema 5.4, el número de Helly de los convexos de  $\mathbb{R}^n$  es  $n + 1$ . De hecho, el teorema 5.4 es simplemente una generalización de la demostración del teorema de Helly a partir del de Radon.

Otras retículas cuyo número de Helly es fácil de calcular son las retículas de cerrados de un matroide. Aquí  $\emptyset$  no necesariamente es cerrado: el cerrado mínimo,  $\langle \emptyset \rangle$ , es el conjunto de todos los lazos.

Para cualquier circuito  $C$ ,  $C \subset C(C)$  pues  $C \subset \langle C - x \rangle$  para cualquier  $x$  del matroide. Esto quiere decir que ningún conjunto que contenga un circuito que no es lazo tiene corazón  $\langle \emptyset \rangle$ .

5.1. Esto es si suponemos que el vacío es cerrado el vacío. En general tenemos que  $C(\square) = \bar{\square}$ .

Los conjuntos con corazón  $\langle \emptyset \rangle$  están, entonces, entre aquellos de la forma  $I \cup L$  donde  $I$  es independiente y  $L$  es un conjunto de lazos. De hecho, como probamos a continuación, cualquiera de estos conjuntos tiene corazón  $\langle \emptyset \rangle$ . (Es útil tener en mente que si  $L \subset \langle \emptyset \rangle$ , entonces  $\langle A \cup L \rangle = \langle A \rangle$ .)

Sea  $T := I \cup L$  con  $I$  independiente y  $L \subset \langle \emptyset \rangle$ . Sea, de ser posible,  $x$  un no lazo en  $C(T)$ . Como para cualquier  $t \in I$  se tiene  $t \notin \langle T - t \rangle$ ,  $x$  no puede estar en  $I$ . Para cualquier  $t \in T$ ,  $x \in \langle T - t \rangle$  y como sabemos que  $x \notin T - t$ , debe existir un circuito  $C_t \subset A - t + x$  tal que  $x \in C_t$ . Ningún  $C_t$  puede ser un lazo, de modo que  $C_t \subset I - t + x$ .

Si hay dos  $C_t$  distintos, digamos  $C_{t_1} \neq C_{t_2}$ , debe haber un circuito contenido en  $C_{t_1} \cup C_{t_2} - x \subset I$ , lo cual es absurdo. Entonces todos los  $C_t$  son iguales, de donde  $x \in C_t \subset \bigcap_{t \in I} (I - t + x) = x$  y  $x$  es un lazo. Esta contradicción muestra que  $C(I) = \langle \emptyset \rangle$ .

Por lo tanto, el número de Helly de la retícula de cerrados de un matroide es simplemente el rango del matroide. En la siguiente sección daremos otro operador de clausura para matroides cuyo número de Helly es más interesante.

Para terminar esta sección diremos como calcular el corazón en un producto de retículas.

**Proposición 5.5.** *Si  $X$  y  $Y$  son dos conjuntos ajenos con operador de clausura tenemos que*

$$C_{X \oplus Y}(A) = C_X(A \cap X) \cup C_Y(A \cap Y).$$

(Para la definición de  $X \oplus Y$  ver el apéndice A.)

**Demostración.** Escribimos  $U := A \cap X$ ,  $V := A \cap Y$ . Ahora,

$$\begin{aligned} C_{X \oplus Y}(A) &= \bigcap_{t \in X \cup Y} \overline{A - t} \\ &= \left( \bigcap_{t \in X} \overline{A - t} \right) \cap \left( \bigcap_{t \in Y} \overline{A - t} \right) \\ &= \left( \bigcap_{t \in X} (\overline{U - t} \cup \overline{V}) \right) \cap \left( \bigcap_{t \in Y} (\overline{U} \cup \overline{V - t}) \right) \\ &= (C_X(U) \cup \overline{V}) \cap (\overline{U} \cup C_Y(V)) \\ &= C_X(U) \cup C_Y(V). \end{aligned}$$

□

**Corolario 5.6.** *Sean  $R_1$  y  $R_2$  dos retículas completas. Entonces,  $h(R_1 \times R_2) = h(R_1) + h(R_2)$ .*

## 5.2 La clausura por componentes y la retícula de particiones

Definiremos un nuevo operador de clausura en el conjunto de puntos de un matroide  $M$ . Para  $A \subset M$ , definimos la **clausura por componentes** de  $A$  como  $[A] := \langle A_1 \rangle \cup \langle A_2 \rangle \cup \dots \cup \langle A_k \rangle$  donde  $\langle \cdot \rangle$  denota la clausura usual en  $M$  y  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son las componentes conexas de  $A$ .

En otras palabras, la clausura por componentes está determinada por las siguientes condiciones:

- i. Si  $A$  es conexo,  $[A] = \langle A \rangle$ .
- ii.  $[A \oplus B] = [A] \cup [B]$ .

Aún no hemos probado que  $[\cdot]$  realmente defina un operador de clausura:

Claramente  $A \subset [A]$ . Si  $A \subset B$ , entonces  $[A] \subset [B]$  porque cada componente conexa de  $A$  está contenida en alguna componente conexa de  $B$ . Para probar la idempotencia usaremos un par de lemas que aclaran bastante la estructura de la clausura por componentes.

**Lema 5.7.** *Si la unión  $A \cup B$  es una suma directa, entonces  $\langle A \rangle \cup \langle B \rangle$  también es una suma directa.*

**Demostración.** Como  $A \cup B \subset \langle A \rangle \cup \langle B \rangle \subset \langle A \cup B \rangle$ , entonces

$$\text{rango}(\langle A \rangle \cup \langle B \rangle) = \text{rango}(A \cup B) = \text{rango}(A) + \text{rango}(B) = \text{rango}(\langle A \rangle) + \text{rango}(\langle B \rangle). \quad \square$$

Gracias al lema anterior, podemos cambiar la fórmula *ii* por  $[A \oplus B] = [A] \oplus [B]$ .

**Lema 5.8.** Si  $A$  es conexo,  $\langle A \rangle - \langle \emptyset \rangle$  es una componente conexa de  $\langle A \rangle$ . Las demás componentes conexas de  $\langle A \rangle$  son los lazos del matroide.

**Demostración.** Es claro por la caracterización de la clausura en términos de circuitos:

$$\langle A \rangle = A \cup \{p \mid \text{hay un circuito } C \subset A \cup p \text{ tal que } C \ni p\}. \quad \square$$

Entonces, si  $A = \bigoplus A_k$  es la descomposición de  $A$  en componentes conexas la descomposición de  $[A]$  es  $[A] = \bigoplus (\langle A_k \rangle - \langle \emptyset \rangle) \oplus \bigoplus_{p \text{ es lazo}} p$ . (La situación es bastante más limpia si  $M$  no tiene lazos.) De esta fórmula es claro que  $[[A]] = [A]$ .

A los cerrados del operador de clausura por componentes les diremos **particiones** del matroide. Desde luego, las particiones de un matroide  $M$  forman una retícula completa  $\pi(M)$ . Si  $M = M_1 \oplus M_2$ , como cada componente conexa de un submatroide de  $M$  debe estar contenida en  $M_1$  o en  $M_2$ , entonces  $\pi(M) = \pi(M_1) \times \pi(M_2)$ . En particular, si  $M$  es independiente,  $\pi(M)$  es el álgebra booleana  $\mathcal{P}(M)$ . Pero los independientes son matroides totalmente disconexos, para matroides conexos hay una sorpresa:

**Proposición 5.9.** La retícula de particiones de un matroide conexo  $M$  es  $\mathcal{P}(M)$  si y solo si  $M$  es CC.

**Demostración.** Si  $M$  no es CC, para algún  $p \in M$  se tiene que  $M - p$  es conexo. Entonces,  $[M - p] = \langle M - p \rangle = M$ , por lo que  $M - p$  no es partición.

Supongamos ahora que  $M$  es CC. Para ver que todos sus subconjuntos son particiones basta ver que todos sus submatroides conexos son planos. Sea  $A \subset M$  conexo. Sea, de ser posible,  $p \in \langle A \rangle - A$ . Como  $M$  es CC,  $M - p = M_1 \oplus M_2$ . Como  $A$  es conexo y  $A \subset M - p$ , para algún  $j$ ,  $A \subset M_j$ . Entonces  $p \in \langle M_j \rangle$  y por el lema 5.7,  $M = \langle M_1 \rangle \oplus \langle M_2 \rangle$ , lo cual contradice la conexidad de  $M$ . Por lo tanto,  $\langle A \rangle = A$ .  $\square$

Cuando hablemos del corazón de un conjunto de puntos de un matroide en esta sección y la siguiente, nos referimos al corazón en la retícula de particiones, no en la retícula de planos del matroide.

Sea  $A$  un matroide CC contenido en  $M$ . Cualquier punto  $p$  de  $C(A) - A$  que no sea lazo es un punto fantasma de  $A$ . En efecto,  $p \in [A] = \langle A \rangle$  y no está en  $A$ , de modo que existe un circuito en  $A + p$  que tiene a  $p$ . Como  $p$  no es lazo, el circuito conecta a  $p$  con al menos un punto de  $A$ . Por lo tanto,  $A + p$  es conexo. Por otra parte, para cualquier  $a \in A$ ,  $A - a = A_1 \oplus A_2$ , digamos. Entonces,  $p \in [A - a] = [A_1] \oplus [A_2]$ , lo cual quiere decir que  $A + p - a$  está contenido en un suma directa e intersecta a ambos sumandos. Por lo tanto,  $A + p - a$  es disconexo.

A los puntos de  $C(A) - A$  que no son lazos les diremos **puntos fantasma fuertes**.

**Proposición 5.10.** Un matroide CC tiene un fantasma fuerte si y sólo si no es un circuito.

**Demostración.** Sea  $C$  un circuito. Para cualquier  $p \in C$ , el conjunto  $C - p$  es independiente y por lo tanto,

$$[C - p] = \langle \emptyset \rangle \oplus \bigoplus_{q \in C - p} (\langle q \rangle - \langle \emptyset \rangle).$$

Los conjuntos  $\langle q \rangle - \langle \emptyset \rangle$  son clases de paralelismo, y por tanto, ajenos para  $qs$  independientes. Entonces,  $C(C) = \langle \emptyset \rangle$ .

Ahora sea  $M$  un matroide CC que no es circuito y sea  $m \in M$ . El matroide  $M - m$  es disconexo, digamos  $M - m = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k$  con los  $M_i$  conexos. Como  $M$  no es un circuito, no todos los  $M_i$  son unitarios y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $M_1$  tiene al menos tres puntos. Abreviemos con  $N$  a  $M_2 \oplus M_3 \oplus \dots \oplus M_k$ . La conexidad de  $M$  y el lema 5.7 implican que  $m$  está fuera de  $\langle M_1 \rangle$  y  $\langle N \rangle$ . Usando esto es fácil ver que  $\{M_1, N + m\}$  es un 2-corte de  $M$ ; por el corolario 4.6,  $M_1 \cap (N + m) = \emptyset$ . Sea  $p$  la proyección de  $M_1$  sobre  $N + m$ . Probaremos que  $p$  es un punto fantasma fuerte de  $M$ .

Sea  $q \in M$ . Si  $q = m$ , tenemos  $p \in \langle M_1 \rangle \subset [M - m]$ . Si  $q \in N$ , una de las componentes de  $M - q$ , digamos  $M'_1$ , contiene a  $M_1$  y por lo tanto,  $p \in \langle M'_1 \rangle \subset [M - q]$ . Finalmente, supongamos que  $q \in M_1$ . Como  $M_1$  es conexo, no tiene puntos aislados, por lo que  $\langle M_1 - q \rangle = \langle M_1 \rangle$ . Como  $p$  está en  $\langle M_1 - q \rangle$  y  $\langle N + m \rangle$ , existen circuitos  $C_1 \subset M_1 - q + p$  y  $C_2 \subset N + m + p$  que tienen a  $p$ . Solo tenemos que probar que  $E := C_1 + C_2 - p$  es conexo pues, si lo es,  $p \in \langle E \rangle = [E] \subset [M - q]$ .

Cualquier circuito contenido en  $E$  debe tener a  $m$ , pues de lo contrario, estaría contenido en  $M_1 \oplus N$  y por lo tanto, en uno de  $C_1$  y  $C_2$ . Pero por el axioma de eliminación fuerte de circuitos, cualquier punto de  $E$  está en un algún circuito contenido en  $E$ , así que todos los puntos de  $E$  están conectados con  $m$ .  $\square$

**Observación 5.11.** La extensión fantasma fuerte construida en la proposición anterior con frecuencia no se sale de una clase dada de matroides. Por ejemplo, si el matroide es proyectivo, el punto fantasma es un punto del proyectivo, pues se determina como la intersección de dos subespacios proyectivos. La situación para matroides gráficos no es tan agradable porque la proyección de un 2-corte no siempre es una inarista. Sin embargo, analizando un poco la estructura de un bloque minimal al que se le quitó una arista, muestra que el punto construido en la demostración anterior siempre es una inarista.

### 5.3 El número de Helly de la retícula de particiones

Para calcular los número de Helly de las retículas de particiones de todos los matroides podemos limitarnos a los matroides conexos, pues si  $M = \bigoplus M_i$ , entonces  $\pi(M) = \prod \pi(M_i)$  y finalmente,  $h(\pi(M)) = \sum h(\pi(M_i))$ .

Sea  $A \subset M$ . Si bien el centro de  $A$  en la retícula de particiones  $\pi(M)$  no sólo depende de  $A$ , tampoco requiere todo  $M$  para calcularse: obviamente el “ambiente” necesario es  $[A]$ . Si  $A = A_1 \oplus A_2$ , entonces  $[A] = [A_1] \oplus [A_2]$  y por la proposición 5.5,  $C(A) = C(A_1) \cup C(A_2)$ , de modo que  $A$  tiene corazón trivial si y solo si tanto  $A_1$  como  $A_2$  lo tienen.

Así que nos falta encontrar los submatroides conexos de  $M$  que tienen corazón trivial en  $\pi(M)$ . Si  $A$  tiene solo un punto, claramente tiene corazón trivial. Si  $A$  es un submatroide conexo pero no CC, para algún  $a \in A$ ,  $A - a$  es conexo y entonces  $a$  sin ser lazo cumple que  $a \in \langle A - a \rangle = [A - a]$  y, por tanto,  $a \in C(A)$ . Luego, en nuestra búsqueda de matroides conexos con corazón trivial, estamos limitados a submatroides CC. Vimos en la sección anterior que los circuitos tiene corazón trivial. También vimos que cualquier matroide CC que no es circuito tiene un fantasma fuerte y por lo tanto corazón no trivial, pero ese fantasma fuerte podría no estar en  $M$ . El resultado depende críticamente de que submatroides CC de  $M$  tienen fantasmas fuertes en  $M$ . Diremos que  $M$  es **pleno** si cualquiera de sus submatroides CC tiene un fantasma fuerte en  $M$ . Sabemos, por ejemplo, que son plenos cualquier espacio proyectivo (sobre un campo) y el matroide de ciclos de una gráfica completa.

**Teorema 5.12.** *Si  $M$  es un matroide pleno sin lazos, su retícula de particiones es  $\lfloor 3 \text{ rango}(M)/2 \rfloor$ -Helly.*

**Demostración.** Todo lo que tenemos que hacer es resolver un problema de optimización: ¿qué tan grande puede ser un submatroide que es suma directa de circuitos y conjuntos unitarios? Sea  $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_n$  uno de tales submatroides. Sea  $s$  el número de  $N_i$  que son unitarios y, para  $j \geq 3$ , sea  $t_j$  el número de  $N_i$  que son circuitos de  $j$  elementos. Tenemos que  $|N| = s + \sum j t_j$  y

$$\text{rango}(M) \geq \text{rango}(N) = s + \sum (j-1)t_j = |N| - \sum t_j = |N| - (n-s),$$

de donde vemos que debemos maximizar  $n - s$ , el número de circuitos en  $N$ . Claramente esto se consigue poniendo los circuitos lo más chico que se puede, es decir, con tres puntos cada uno. En ese caso,  $t_3 = \lfloor \text{rango}(M)/2 \rfloor$ , los demás  $t_j$  son 0,  $s$  es el residuo de dividir  $\text{rango}(M)$  entre 2 y  $|N| = s + 3t_3 = \lfloor 3 \text{ rango}(M)/2 \rfloor$ .  $\square$

Cuando  $M$  contiene la suma de 3-circuitos (y posiblemente un punto) que aparece en la prueba anterior, se tiene que  $h(\pi(M)) = \lfloor 3 \text{ rango}(M)/2 \rfloor$ . Esto es el caso para el matroide de un espacio proyectivo o una



gráfica completa.

## Capítulo 6

# Seudobases proyectivas

El Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva dice si tomamos en el espacio proyectivo de dimensión  $n$  sobre un campo dos conjuntos de  $n + 2$  en posición general,  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+2}\}$  y  $\{b_1, b_2, \dots, b_{n+2}\}$ , existe una única proyectividad en la  $a_k \mapsto b_k$  para toda  $k$ . Traduzcamos esto a términos matroidales: un conjunto de  $n + 2$  puntos en posición general es simplemente un circuito generador. Entonces el teorema afirma que cualquier biyección entre dos circuitos generadores se extiende a una única proyectividad.

Una proyectividad es un automorfismo matroidal del espacio proyectivo, de modo que solo se puede extender una biyección entre dos conjuntos de puntos si es un isomorfismo matroidal. (Cualquier biyección entre dos circuitos es un isomorfismo y es por esto que no apareció en el párrafo anterior ninguna condición sobre la biyección.) Diremos que un conjunto  $A$  de puntos del proyectivo es **unirepresentable** si cualquier isomorfismo matroidal entre  $A$  y otro conjunto de puntos del espacio se extiende a una proyectividad. Si además  $A$  fija (ver el capítulo 1), cualquier isomorfismo matroidal se extiende a una *única* proyectividad. Le llamaremos **seudobase** a un conjunto de puntos unirepresentable que es fijador minimal del subespacio que genera.

Ahora podemos reformular el teorema fundamental de la geometría proyectiva diciendo que cualquier circuito es una seudobase. En esta sección daremos una caracterización recursiva de todas las seudobases.

**Lema 6.1.** *Si un conjunto de puntos es unirepresentable, cualquier subdivisión (no fantasma) de él lo es. Recíprocamente, si alguna subdivisión de un conjunto es unirepresentable, el conjunto lo es.*

**Demostración.** Supongamos que  $A + p$  es unirepresentable y que  $A + \{a, b\}$  es su subdivisión en  $p$ . Sea  $f: A + \{a, b\} \rightarrow B + \{u, v\}$  un isomorfismo de matroides con  $f(a) = u$  y  $f(b) = v$ . Por el isomorfismo,  $\{u, v\}$  es un 2-cocircuito de  $B + \{u, v\}$ ; sea  $t$  su proyección. Definimos una función  $\tilde{f}: A + p \rightarrow B + t$  por medio de  $\tilde{f}|_A = f|_A$  y  $\tilde{f}(p) = t$ . Como  $A + p$  es isomorfo a la contracción de  $A + \{a, b\}$  por  $a$  y  $B + t$  es la correspondiente contracción de  $B + \{u, v\}$  por  $u = f(a)$ , la función  $\tilde{f}$  es un isomorfismo de matroides y tiene una extensión a una proyectividad  $\varphi: \langle A + p \rangle \rightarrow \langle B + t \rangle$ . Ahora debemos extender  $\varphi$  al subespacio  $\langle A + \{a, b\} \rangle$  del que  $\langle A + p \rangle$  es un hiperplano. Esto es fácil: la extensión de  $\varphi$  debe enviar los puntos colineales  $p, a, b$  en  $t, u, v$  respectivamente. Por el teorema fundamental para dimensión 1, la extensión existe (y de hecho es única).

Conservando la notación, supongamos que  $A + \{a, b\}$  es unirepresentable y probemos que  $A + p$  lo es. Sea  $g: A + p \rightarrow B + t$  un isomorfismo con  $g(p) = t$ . Sea  $B + \{u, v\}$  la subdivisión de  $B + t$  en  $t$ . Entonces  $\tilde{g}: A + \{a, b\} \rightarrow B + \{u, v\}$  dada por  $\tilde{g}|_A = g|_A$  y  $\tilde{g}(a) = u, \tilde{g}(b) = v$  es un isomorfismo de matroides. Si  $\varphi$  es una extensión de  $\tilde{g}$  a una proyectividad  $\langle A + \{a, b\} \rangle \rightarrow \langle B + \{u, v\} \rangle$ , entonces  $\varphi(p) = t$  y  $\varphi|_{\langle A + p \rangle}$  es la proyectividad deseada.  $\square$

Sea  $A + p$  un conjunto de puntos en el espacio proyectivo. ¿Cómo encontramos todas las extensiones de  $A$  isomorfas a  $A + p$ ? Como matroide,  $A + q$  es “casi” isomorfo a  $A + p$  (por medio de la función que es la identidad en  $A$  y manda a  $p$  en  $q$ ), solo falta que  $q$  forme circuito con exactamente los mismos subconjuntos de  $A$  que  $p$ . Alternativamente, falta que  $q$  esté en planos generados por precisamente los mismos subconjuntos que los que generan planos que pasan por  $p$ . Es decir,  $q$  debe pertenecer a

$$E(p, A) := \bigcap_{\substack{S \subset A \\ p \in \langle S \rangle}} \langle S \rangle - \bigcup_{\substack{T \subset A \\ p \notin \langle T \rangle}} \langle T \rangle.$$

Este conjunto siempre contiene por lo menos a  $p$ . Sea  $L$  la intersección que figura en la definición de  $E(p, A)$ . Como  $p \in L$ , para cualquier  $T \subset A$  con  $p \notin \langle T \rangle$ ,  $L \cap \langle T \rangle$  es un subespacio propio de  $L$ . Si el campo sobre el cual se toma el espacio proyectivo es infinito, como supodremos por el resto de esta sección, y si además  $\dim L > 0$ , entonces  $E(p, A)$  es un conjunto infinito. Cuando el campo no es infinito, un espacio proyectivo sí es unión de subespacios propios, por lo que  $E(p, A)$  puede ser  $\{p\}$  aunque  $\dim L > 0$ .

Diremos que  $A + p$  es una extensión **anclada** de  $A$  si  $E(p, A) = p$ . La importancia de las extensiones ancladas es que son las que conservan la unirepresentabilidad.

**Proposición 6.2.** *Si  $A$  es unaseudobase, la extensión  $A + p$  es unirepresentable si y solo si está anclada.*

**Demostración.** Sea  $f: A + p \rightarrow B + q$  un isomorfismo matroidal con  $f(p) = q$ . Como  $A$  esseudobase,  $f|_A$  se extiende a única proyectividad  $\varphi$ . Claramente  $\varphi(E(p, A)) = E(\varphi(p), B)$ .

Como  $f$  es un isomorfismo matroidal, establece una biyección entre los subconjuntos de  $A$  que generan planos que pasan por  $p$  y los subconjuntos de  $B$  que generan planos que pasan por  $q$ . Por lo tanto,  $q \in \varphi(E(p, A))$ .

Si  $A + p$  es una extensión anclada, lo anterior muestra que  $q = \varphi(p)$ , de donde  $A + p$  es unirepresentable.

Si  $A + p$  no está anclada, para cualquier  $t \in \varphi(E(p, A) - p) = E(\varphi(p), A) - \varphi(p)$ ,  $B + t$  es isomorfo a  $A + p$  por medio de la función que concide con  $f$  en  $A$  y envía a  $p$  a  $q$ . Pero este isomorfismo matroidal no se extiende a una proyectividad porque al ser  $A$ seudobase,  $\varphi$  es la única extensión de  $f|_A$ . Por lo tanto, en este caso  $A + p$  no es unirepresentable.  $\square$

Por el teorema 4.3 y las dos proposiciones anteriores obtenemos la siguiente caracterización de lasseudobases proyectivas:

**Teorema 6.3.** *En el espacio proyectivo sobre un campo infinito, lasseudobases proyectivas son exactamente aquellos conjuntos de puntos proyectivos que se pueden obtener a partir de tres puntos colineales por medio de subdivisiones y subdivisiones fantasmas ancladas.*

Cualquier extensión gráfica de un matroide conexo está anclada, pues está definida por un 2-corte de un ciclo. Entonces, cualquier conjunto de puntos en el proyectivo cuyo matroide sea isomorfo al de un bloque minimal es unaseudobase. También, cualquier matroide gráfico conexo es unirepresentable. Es fácil ver que un matroide es unirepresentable si y sólo si cada una de sus componentes conexas es unirepresentable. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 6.4.** *La realización en el espacio proyectivo (sobre un campo infinito) de un matroide gráfico es única salvo proyectividades.*

# Apéndice A

## Operadores de clausura

Un **operador de clausura** en un conjunto  $X$  es una función  $\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Típicamente la clausura de  $A \subset X$  se denota  $\bar{A}$ ,  $\langle A \rangle$  o  $\text{cl}(A)$ . El operador de clausura debe ser:

**Creciente.**  $A \subset \bar{A}$ ,

**Monótono.**  $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$ , e

**Idempotente.**  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

Los subconjuntos tales que  $A = \bar{A}$  se llaman **cerrados**. Como la clausura es creciente,  $A$  es cerrado si y sólo si  $A \supset \bar{A}$ . Por la idempotencia, cualquier  $\bar{A}$  es cerrado.

**Proposición A.1.** Si  $\{A_i | i \in I\}$  es una familia de cerrados,  $\bigcap_{i \in I} A_i$  es cerrado también.

**Demostración.** Sea  $A := \bigcap A_i$ . Como  $A \subset A_i$ ,  $\bar{A} \subset \bar{A}_i = A_i$ , de donde  $\bar{A} \subset \bigcap A_i = A$ . □

**Proposición A.2.**  $\bar{A} = \bigcap \{C | C \text{ es cerrado, } C \supset A\}$ .

**Demostración.** Sea  $B := \bigcap \{C | C \text{ es cerrado, } C \supset A\}$ . Como  $\bar{A}$  es cerrado y contiene a  $A$ ,  $B \subset \bar{A}$ . Por otra parte, para cualquier cerrado  $C \supset A$ ,  $C = \bar{C} \supset \bar{A}$ , de donde  $B \supset \bar{A}$ . □

Estas dos proposiciones caracterizan a los cerrados y su conexión con la clausura:

**Proposición A.3.** Si algunos de los subconjuntos de  $X$  se designan como cerrados de manera que se cumpla la proposición A.1 y se define  $\bar{A}$  según la proposición A.2, entonces  $A \mapsto \bar{A}$  es un operador de clausura cuyos cerrados son los designados.

**Demostración.** Claramente  $A \subset \bar{A}$ .

Para  $A \subset X$  sea  $A^* := \{C | C \text{ es cerrado, } C \supset A\}$ . Si  $A \subset B$ , entonces  $A^* \supset B^*$  y por tanto,  $\bar{A} \subset \bar{B}$ .

Antes de probar la idempotencia veamos que los puntos fijos de la clausura son exactamente los cerrados. Como la intersección de cerrados es cerrado,  $\bar{A}$  es cerrado. Por lo tanto, si  $A = \bar{A}$ ,  $A$  es un cerrado. Por otra parte, si  $A$  es cerrado,  $A \in A^*$  y por tanto  $\bar{A} = \bigcap A^* \subset A \subset \bar{A}$ .

Finalmente, como  $\bar{A}$  es cerrado,  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ . □

Más útil para nosotros será la conexión entre clausuras y retículas completas:

**Teorema A.4.** Los cerrados de un operador de clausura forman un retícula completa (con respecto a la inclusión). En este retícula el ínfimo de una familia es su intersección y su supremo es la clausura de su unión.

**Demostración.** La intersección es el ínfimo en la retícula de todos los subconjuntos y, por la proposición A.1, es a su vez un cerrado. Esto prueba la caracterización del ínfimo.

Ahora sabemos que los cerrados son una retícula completa. Ahora, el supremo de una familia  $\{C_i\}$  se puede calcular como el ínfimo de las cotas superiores, es decir, como  $\bigcap \{C | C \text{ cerrado, } C \supset C_i \forall i\} = \bigcap \{C | C \text{ cerrado, } C \supset \bigcup C_i\}$ , lo que prueba la caracterización del supremo. □

**Teorema A.5.** Cualquier retícula completa es isomorfa a la retícula de cerrados de algún operador de clausura.

**Demostración.** Sea  $R$  una retícula completa. Para  $x \in R$  definimos  $\downarrow x := \{y \in R \mid y \leq x\}$ . Como  $x \leq y \Leftrightarrow \downarrow x \subset \downarrow y$ ,  $R$  es isomorfo a  $S = \{\downarrow x \mid x \in R\}$  ordenado por inclusión. (Lo anterior es válido para cualquier orden parcial.)

Finalmente, como  $\bigcap_{x \in X} \downarrow x = \downarrow \bigwedge_{x \in X} x$ ,  $S$  es cerrado bajo intersecciones y A.3 concluye la prueba.  $\square$

A veces puede resultar molesto que el vacío no sea cerrado. Si nos interesa solamente la retícula de cerrados esto se puede remediar:

**Teorema A.6.** *Para cualquier operador de clausura existe otro en el que el vacío es cerrado y cuya retícula de cerrados isomorfa a la del primer operador.*

**Demostración.** Sea  $X$  un conjunto con operador de clausura  $A \mapsto \bar{A}$ . Definimos  $\langle A \rangle := \bar{A} - \bar{\emptyset}$ . Notemos que  $\bar{A} = \overline{\langle A \rangle}$  (pues  $\langle A \rangle \subset \bar{A} = \langle A \rangle \cup \bar{\emptyset} \subset \overline{\langle A \rangle}$ ).

Probaremos que  $\langle \cdot \rangle$  es un operador de clausura en  $Y := X - \bar{\emptyset}$ . Como  $\langle A \rangle = Y \cap \bar{A}$ , se hereda lo creciente y monótono de la clausura en  $X$ . Además,  $\langle \langle A \rangle \rangle = \overline{\langle A \rangle} - \bar{\emptyset} = \bar{A} - \bar{\emptyset} = \langle A \rangle$ .

Claramente  $\emptyset$  es cerrado en  $Y$ . Si  $C$  es un cerrado en  $X$ ,  $C - \bar{\emptyset} = \langle C \rangle$  es un cerrado en  $Y$ . Recíprocamente, si  $C$  es un cerrado en  $Y$ ,  $C \cup \bar{\emptyset} = \bar{C} \subset \overline{C \cup \bar{\emptyset}}$ , por lo que  $C \cup \bar{\emptyset}$  es un cerrado de  $X$ .  $\square$

Necesitaremos un concepto más que es un poco inusual para clausuras: la **suma directa**. Si  $Y$  y  $Z$  son conjuntos ajenos con un operador de clausura, podemos definir una clausura en  $X := Y \cup Z$  por medio de  $\langle A \rangle_X := \langle A \cap Y \rangle_Y \cup \langle A \cap Z \rangle_Z$ . Para indicar que en  $X$  se define la clausura por la fórmula anterior usaremos la notación  $X = Y \oplus Z$ . Es fácil ver que  $\langle \cdot \rangle_X$  realmente define una clausura en  $X$  y que sus cerrados son la unión de un cerrado de  $Y$  con uno de  $Z$ . Esto último indica que en términos de las retículas de cerrados la suma directa es una operación familiar: el producto de ordenes parciales.

# Bibliografia

- [1] G. A. Dirac. Minimally 2-connected graphs. *J. Reine Angew Math.*, 228:204–216, 1967.
- [2] S. T. Hedetniemi. Characterizations and constructions of minimally 2-connected graphs and minimally strong digraphs. In *Proceeding of the Second Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, pages 257–282. Louisiana State University, Baton Rouge, La., 1971.
- [3] U. S. R. Murty. Extremal critically connected matroids. *Discrete Mathematics*, 8:49–58, 1974.
- [4] J. G. Oxley. On connectivity in matroids and graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 265:47–58, 1981.
- [5] M. D. Plummer. On minimal blocks. *Transactions of the American Mathematical Society*, 265:85–94, 1981.
- [6] P. D. Seymour. Matroid representation over  $GF(3)$ . *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 26:159–173, 1979.
- [7] W. T. Tutte. Connectivity in matroids. *Canadian Journal of Mathematics*, 18:1301–1324, 1996.
- [8] N. L. White. The bracket ring of a combinatorial geometry ii: unimodular geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 214:233–248, 1975.