# Tarea 1: Álgebra Homológica

Varios de estos ejercicios están tomados de *An Introduction to Homological Algebra* de Chuck Weibel.

## 1 Filtraciones

Sea $A$ un grupo abeliano con una filtración $A = F^n A \supset F^{n-1} A \supset \cdots \supset F_0 A = 0$. Recuerda que el grupo graduado asociado está dado por $\mathrm{gr}_k A := F^k A / F^{k-1} A$.

1. Encuentra todas las posiblidades para $A$ si tres de los $\mathrm{gr}_k A$ son $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/4$ en algún orden y los demás $\mathrm{gr}_k A$ son cero. Ahora encuentra las posiblidades si los $\mathrm{gr}_k A$ distintos de cero son $\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}/6$.

2. ¿Para cuáles de las siguientes clases $\mathscr{C}$ de grupos abelianos es cierto que si todos los $\mathrm{gr}_k A \in \mathscr{C}$ entonces $A \in \mathscr{C}$? ¿Para cuáles es cierto el recíproco?

   La de clase de los grupos abelianos . . .

   - cíclicos,
   - finitos,
   - finitamente generados,
   - libres,
   - libres de torsión,
   - de torsión,
   - divisibles,
   - aniquilados por alguna potencia de un primo,
   - aniquilados por un primo.

## 2 La sucesión exacta de cinco términos

1. Sea $E^r_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$ una sucesión espectral (homológica, es decir con $d^r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$) de primer cuadrante (o sea, $E^r_{p,q} = 0$ si $p < 0$ o $q < 0$). Prueba que existe una sucesión exacta de la forma

$$H_2 \to E^2_{2,0} \to E^2_{0,1} \to H_1 \to E^2_{1,0} \to 0.$$

## 3 El funtor Tor

En estos problemas, a menos que se especifique lo contrario, $R$ es un anillo conmutativo y $M$, $N$ denotan $R$-módulos.

1. Prueba que las siguientes son equivalentes:

   - $M$ es plano (o sea, $M \otimes_R -$ es exacto).

- $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)=0$ para todo $R$-módulo $N$.
- $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)=0$ para toda $i\geq 1$ y todo $R$-módulo $N$.

2. Prueba que $\mathrm{Tor}_1^R(R/(r),M)=\{x\in M : rx=0\}$.

3. Prueba que $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)\cong \mathrm{Tor}_i^R(N,M)$.

4. Prueba que para $R=\mathbb{Z}$, un $R$-módulo es plano si y solo si es un grupo abeliano libre de torsión.

5. Prueba que para $R=\mathbb{Z}$, $\mathrm{Tor}_i(M,N)=0$ para cualquier $i>1$.

6. Calcula $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}/k}(\mathbb{Z}/m,\mathbb{Z}/n)$.

# 4 El funtor Ext

Aquí también, $R$ es un anillo conmutativo y $M$, $N$ denotan $R$-módulos.

1. Prueba que «$\mathrm{Ext}_R(M,N)$ se puede calcular con una resolución proyectiva de $M$ o una resolución inyectiva de $N$», es decir, que si $P_\bullet\to M$ es una resolución proyectiva y $N\to I_\bullet$ es una resolución inyectiva, entonces
$$H_n(\mathrm{Hom}(P_\bullet,N))\cong H_n(\mathrm{Hom}(M,I_\bullet)).$$

2. Prueba que para $R=\mathbb{Z}$, $\mathrm{Ext}^i(M,N)=0$ para cualquier $i>1$.

3. Sean $R=\mathbb{Z}/m$ y $N=\mathbb{Z}/p$ con $p|m$ (así $N$ es un $R$-módulo). Muestra que $N$ tiene una resolución inyectiva que consta de copias de $R$ con homomorfismos dados alternadamente por multiplicar por $p$ y por $m/p$. Usando eso describe $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)$ en términos de $\mathrm{Hom}(M,R)$. En particular, muestra que si $p^2|m$ entonces $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}/m}(\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z}/p)\cong\mathbb{Z}/p$, ¡para toda $n\geq 0$!

4. Supón que $A_\bullet$ es un complejo de $R$-módulos proyectivos con $A_n=0$ para $n<0$. Prueba que existe una sucesión espectral convergente de la forma
$$E_2^{p,q}=\mathrm{Ext}_R^p(H_q(A_\bullet,M))\Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Hom}(A_\bullet,M)).$$
En el caso en que $R=\mathbb{Z}$, prueba que esto se simplifica a una sucesión exacta corta:
$$0\to\mathrm{Ext}(H_{n-1}(A_\bullet),M)\to H^n(\mathrm{Hom}(A_\bullet,M))\to\mathrm{Hom}(H_n(A_\bullet,M))\to 0.$$

# 5 Lemas de álgebra homológica

1. Prueba que si $C_{\bullet,\bullet}$ es un complejo doble *acotado* (o sea que en cada diagonal $p+q=n$, solo un número finito de términos $C_{p,q}$ son distintos de cero) con renglones exactos, entonces $\mathrm{Tot}(C_{\bullet,\bullet})$ es un complejo acíclico. Da un ejemplo que muestre que la hipótesis de ser acotado es necesaria.

2. Prueba que si en un complejo doble acotado todos los renglones son exactos y todas las columnas salvo una son exactas, entonces la columna faltante es exacta también. Esto *casi* generaliza el «lema de $3\times 3$», consulta un libro de texto de álgebra homológica para ver el enunciado preciso del lema y explica porque este resultado solo *casi* lo generaliza.

3. Prueba que si $f: C_\bullet\to D_\bullet$ es un morfismo de complejos de cadena tal que los complejos $\ker(f)$ y $\mathrm{coker}(f)$ son acíclicos, entonces $f$ es un cuasi-isomorfismo. ¿Es cierto el recíproco?

4. Supón que en el siguiente diagrama los renglones son exactos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & E \arrow[d, "e"'] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}.$$

   - Prueba que si $b$ y $d$ son isomorfismos, $a$ es epimorfismo y $e$ es monomorfismo, entonces $c$ es isomorfismo.
   - ¿Qué se puede decir de $c$ si quitamos la hipótesis de que $a$ es epimorfismo?

5. Prueba que el funtor Tot que va de la categoría de complejos dobles a la categoría de complejos es exacto. Prueba también que si hay una sucesión exacta corta de complejos dobles

$$0 \to A_{\bullet,\bullet} \to B_{\bullet,\bullet} \to C_{\bullet,\bullet} \to 0$$

   y $\mathrm{Tot}(C_{\bullet,\bullet})$ es acíclico, entonces $\mathrm{Tot}(A_{\bullet,\bullet}) \to \mathrm{Tot}(B_{\bullet,\bullet})$ es un cuasi-isomorfismo.