Introducción a la Teoría de Representaciones: El Grupo Simétrico

I Verano de la Investigación en Matemáticas
Instituto de Matemáticas, UNAM, Unidad Cuernavaca

Monica del Rocio Garcia Gallegos
Universidad Autónoma de Aguascalientes

Tutor: Gregor Weingart

Introducción

Este trabajo es el fruto de una estancia de verano en la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM, en el cual tuve la oportunidad de estudiar las representaciones del grupo simétrico bajo la tutoría del Dr. Gregor Weingart. Mi objetivo al escribir este texto es proveer a otros estudiantes de las herramientas básicas de la teoría de representaciones, necesarias para el estudio de la tabla de caracteres del grupo S_n; que si bien en principio podría parecer difícil de obtener, su cálculo se reduce a argumentos puramente combinatorios.
Existen varios metodos para la obtención de dicha tabla, el primero de ellos desarrollado por el matemático aleman F. G. Frobenius, considerado el creador de la Teoría de Representaciones. Sin embargo, al ser implementado en computadora este método puede volverse ineficiente cuando n es grande; por lo que en el siglo pasado los matemáticos Francis D. Murnaghan y T. Nakayama crearon un nuevo método capaz de sortear esta dificultad. En este texto se exponen los resultados más importantes que derivaron en la obtención de dichos métodos.

Al ser solo una introducción, muchos teoremas se dejan sin demostración con el fin de discutir su aplicación al grupo simétrico. Para conocer las pruebas y continuar el estudio de este tema, invito al lector a consultar [**?**, **?**].

1. Representaciones de un grupo

Definición 1.1. *Una representación de un grupo G es un homomorfismo*

$$\varphi : G \longrightarrow GL(V)$$

donde $GL(V)$ denota el conjunto de transformaciones lineares invertibles de un espacio vectorial V en sí mismo. La dimensión de V es llamada el grado *de φ. A la evaluación de φ en un elemento g del grupo la denotamos como φ_g.*

Para efectos de este trabajo, consideraremos a V como un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Es deseable contar con una forma de comparar las distintas representaciones de un mismo grupo, para lo cual es necesario introducir un concepto de equivalencia:

Definición 1.2. *Dos representaciones $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ y $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ se dicen equivalentes si existe un isomorfismo $T : V \longrightarrow W$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\psi_g"] & W \end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir tal que $\psi_g = T \circ \varphi_g \circ T^{-1}\ \forall g \in G$.

Definición 1.3. *Sean $\varphi^{(1)} : G \to GL(V_1)$ y $\varphi^{(2)} : G \to GL(V_2)$ dos representaciones, definimos*

$$\varphi^{(1)} \oplus \varphi^{(2)} : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$$

*como su **suma directa**. Esta es dada por:*

$$(\varphi^{(1)} \oplus \varphi^{(2)})_g(v_1, v_2) = (\varphi^{(1)}(v_1), \varphi^{(2)}(v_2))$$

Consideremos ahora $\varphi : G \to GL(V)$ y a W subespacio de V, decimos que W es G-invariante si

$$\varphi_g(w) \in W \qquad \forall g \in G \quad w \in W$$

Así podemos hacer

$$\varphi|_W : G \to GL(W)$$
$$\varphi|_{W_g}(w) = \varphi_q(w) \in W$$

Definición 1.4. *A $\varphi|_W$ le damos el nombre de subrepesentación de φ. Notemos que si $V = V_1 \oplus V_2$ entonces $\varphi \approx \varphi|_{V_1} \oplus \varphi|_{V_2}$ siempre que V_1 y V_2 sean G-invariantes*

Nuestro objetivo es poder estudiar cualquier representación en base a componentes más "simples" de esta, así tenemos:

Definición 1.5. ***(Representación irreducible)*** *Una representación $\varphi : G \to GL(V)$ no trivial se dice irreducible si los únicos subespacios G-invariantes de V son $\{0\}$ y V*

Definición 1.6. *Decimos que* $\varphi : G \to GL(V)$ *se puede descomponer si* $V = V_1 \oplus V_2$ *con* V_1, V_2 *subespacios* G*-invariantes no triviales de* V

Definición 1.7. ***(Representación completamente reducible)*** *Una representación* $\varphi : G \to GL(V)$ *se dice completamente reducible si*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$$

donde las V_i *son subespacios* G*-invariantes no triviales de* V *y donde* $\varphi|_{V_i}$ *es irreducible para todo* $i = 1, ..., n$.

Puede probarse que las nociones de irreductibilidad y descomposición de una representación solo dependen de su clase de equivalencia, esto es, sí una representación es equivalente a otra que es completamente irreducible, esta también lo será. Introducimos ahora el concepto de representación unitaria:

Definición 1.8. *Consideremos ahora un espacio vectorial con un producto interno* V*. Una representación* $\varphi : G \to GL(V)$ *es llamada unitaria si*

$$< \varphi_g(v), \varphi_g(w) >=< v, w > \quad \forall v, w \in V \quad g \in G$$

Lema 1.1. *Sea* $\varphi : G \to GL(V)$ *una representación unitaria. Luego* φ *es o irreducible o puede descomponerse.*

Finalmente, obtenemos el siguiente lema

Lema 1.2. ***Toda representación de un grupo finito*** G ***es equivalente a una representación unitaria.***
Demostración. Sea $\varphi : G \to GL(V)$ *una representación con* $dim(V) = n$*. Tomemos una base* B *de* V *y hagamos* $T : V \to \mathbb{C}^n$ *el isomorfismo que toma coordenadas con respecto a* B*. Estableciendo* $\rho_g = T \circ \varphi_g \circ T^{-1}$ *para* $g \in G$*, así hemos construido la representación*

$$\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$$

que es equivalente a φ*. Sea* $<,>$ *el productor interno estándar en* $\mathbb{C}$*. Definimos un nuevo producto interno* $(,)$ *como*

$$(v, w) = \sum_{g \in G} < \rho_g(v), \rho_g(w) >$$

ρ *es unitaria con respecto a este producto interno, pues*

$$(\rho_h(v), \rho_h(w)) = \sum_{g \in G} < \rho_h\rho_g(v), \rho_h\rho_g(w) >= \sum_{x \in G} < \rho_x(v), \rho_x(w) >= (v, w)$$

$$\therefore \varphi \text{ es unitaria}$$

Teorema 1.1. ***(Maschke) Toda representación de un grupo finito es completamente irreducible***
Demostración. Usando inducción sobre el grado de la representación y el lema anterior obtenemos lo deseado.

Antes de definir lo que es el caracter de una representación, estudiemos el concepto de homomorfismo asociado a estas:

Definición 1.9. *Sean $\varphi : G \to GL(V)$ y $\rho : G \to GL(W)$, un homomorfismo es una transformación lineal $T : V \to W$ tal que*

$$T\varphi_g = \rho_g T \quad \forall g \in G$$

Al conjunto de todos los homomorfismos lo denotamos como $Hom_G(\varphi, \rho)$. Notemos que este último es un subespacio de $Hom(V, W)$

Un resultado importante relacionado con $Hom_G(\varphi, \rho)$ es el siguiente

Lema 1.3. ***(de Schur)*** *Sean φ y ρ representaciones de G y $T \in Hom_G(\varphi, \rho)$ entonces*
- *T es invertible o $T \equiv 0$*
- *Si $\varphi \nsim \rho$, entonces $Hom_G(\varphi, \rho) = 0$*
- *Si $\varphi = \rho$, entonces $T = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$*

Por otro lado, sea $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{C})$ una representación, luego

$$\varphi_g = (\varphi_{ij}(g))$$

donde $\varphi_{ij}(g) \in \mathbb{C}$, pues recordemos que $GL_n(C) \simeq M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Otro teorema importante para la teoría de caracteres de una representación es el siguiente:

Teorema 1.2. ***(Relaciones de ortogonalidad de Schur)*** *Sean $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{C})$ y $\varphi : G \to GL_m(\mathbb{C})$ representaciones no equivalentes, irreducibles y unitarias. Luego*
- $< \rho_{kl}, \varphi_{ij} >= 0$
- $< \varphi_{kl}, \varphi_{ij} >= \begin{cases} \frac{1}{n} & if \quad i = k \quad j = l \\ 0 & else \end{cases}$

Donde $<, >$ es el producto interno del espacio vectorial $L(G) = \{f \mid f : G \to \mathbb{C}\}$ dado por

$$< f_1, f_2 >= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{f_1}(g) f_2(g)$$

De este ultimo teorema se sigue que si $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{C})$ es una representación unitaria e irreducible de G con $deg(\varphi) = d$, entonces las d^2 funciones $\{\sqrt{d}\varphi_{ij} \mid 1 \le i, j \le d\}$ forman un conjunto ortonormal en $L(G)$. Aun más, puesto que el teorema nos dice que si dos representaciones no son equivalentes, estas son ortogonales con respecto a $<,>$, entonces todas las .entradas”de representaciones no equivalentes unitarias e irreducibles forman un conjunto ortonormal en $L(G)$, cuya dimensión es a lo más $|G|$. Es decir, si $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ es un conjunto completo de representantes de las clases de equivalencia de representaciones irreducibles de G y $deg(\varphi^{(i)}) = d_i$, luego

$$\{\sqrt{d_k}{\varphi_{ij}}^{(k)} \ \mid \ 1 \leq k \leq s \ \ 1 \leq i, j \leq d_k\}$$

forma un conjunto de funciones ortnormales en $L(G)$ y

$$s \leq \sum_{k=1}^{s} d_k \leq |G|$$

2. Caracteres y funciones clase

La idea detrás de las representaciones es poder conocer a un grupo mediante las propiedades de los espacios vectoriales donde actúan. En esta sección estudiamos la relación que hay entre un grupo y la traza de la matriz asociada a una representación de este.

Definición 2.1. *Sea $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{C})$. El caracter $\chi_\varphi : G \to \mathbb{C}$ esta definido como*

$$\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g)$$

Esta función cumple que:
(1) $\chi_\varphi(1) = deg(\varphi)$
(2) Si φ y ρ son equivalentes $\chi_\varphi = \chi_\rho$
(3) $\chi_\varphi(hgh^{-1}) = \chi_\varphi(g) \ \ \forall g, h \in G$

Por otro lado tenemos las funciones clase:

Definición 2.2. *Una función $f : G \to \mathbb{C}$ se dice función clase si $f(g) = f(hgh^{-1}) \ \ \forall gh \in G$. El espacio de funciones clase esta denotado por $Z(L(G))$ y es un subespacio de $L(G)$*

Si denotamos $Cl(G)$ a las clases de conjugación de G, entonces para $C \in Cl(G)$ podemos definir la función

$$\delta_C : G \to \mathbb{C}$$

$$\delta_C(g) = \begin{cases} 1 & g \in C \\ 0 & g \notin C \end{cases}$$

que de hecho es una base para $Z(L(G))$ y así $dim(Z(L(G))) = |Cl(G)|$

Teorema 2.1. *Sean φ y ρ representaciones irreducibles de G. Luego*

$$< \chi_\varphi, \chi_\rho >= \begin{cases} 1 & \varphi \sim \rho \\ 0 & \varphi \not\sim \rho \end{cases}$$

Así tenemos que los caracteres irreducibles forman un conjunto ortonormal de funciones clase, lo cual nos dice que hay a lo mas $|Cl(G)|$ clases de equivalencia de representaciones irreducibles.

Definición 2.3. *Si $\varphi \sim m_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus m_s\varphi^{(s)}$ donde $m_i\varphi^{(i)} = \varphi^{(i)} \oplus ... \oplus \varphi^{(i)}$ m_i veces, entonces m_i recibe el nombre de multiplicidad de $\varphi^{(i)}$ en φ*

Teorema 2.2. *Sea $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ un conjunto completo de representantes de las clases de equivalencia de las representaciones irreducibles de φ tales que*

$$\varphi \sim m_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus m_s\varphi^{(s)}$$

Luego $m_i =< \chi_{\varphi^{(i)}}, \chi_\varphi >$. Es decir, la descomposición de φ en componentes irreducibles es única y φ es ta determinada por su caracter.

2.1. La Representación regular

Definición 2.4. *Sea G un grupo finito. La representación regular de G es el homomorfismo $L : G \to GL(\mathbb{C}G)$ definida por*

$$L_g(\sum_{h \in G} c_h h) = \sum_{h \in G} c_h gh = \sum_{x \in G} c_{g^{-1}x} x$$

Algunas propiedades de esta representación son:
- Esta de G es unitaria
- El caracter de esta representación esta dada por

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & g = 1 \\ 0 & g \neq 1 \end{cases}$$

Por otro lado, esta representación codifica toda la información del grupo:

Teorema 2.3. *Sea L la representación regular de G, luego si $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ es un conjunto completo de representantes de las clases de equivalencia de **todas** las representaciones irreducibles e unitarias de G, entonces se cumple que*

$$L \sim d_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus d_s\varphi^{(s)}$$

donde $d_i = deg(\varphi^{(i)})$. Ademas

$$|G| = \sum_{k=1}^{s} {d_k}^2$$

Con esto, podemos probar también que el conjunto $\chi_1, ..., \chi_s$ forma una base ortonormal de $Z(L(G))$ de lo cual se deduce que $|Cl(G)| = s$. En resumen, la representación regular nos brinda información muy útil sobre la estructura del grupo, su número de elementos, así como el total de clases de conjugación.

Trabajo futuro

Como hemos visto, conocer los caracteres de las representaciones irreducibles asociadas a un grupo finito nos da información sobre este. Resulta, que calcular la tabla de caracteres del grupo simétrico S_n puede hacerse computacionalmente. Es mi interés lograr programar un algoritmo para realizarlo, sin embargo aún necesito estudiar algunas herramientas combinatorias para lograrlo. Agradezco al Instituto de Matemáticas por esta gran oportunidad, con esta experiencia al fin logre discernir entre lo que deseo hacer con mi carrera dentro de las Matemáticas.

Referencias

[1] BENJAMIN STEINBERG, *Representation Theory of Finite Groups: An Introductory Approach*, Springer, 2012.

[2] G. JAMES & A. KERBER, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.