Unidad de Cuernavaca del Instituto de Matématicas, UNAM.

Transformaciones de Möb$^+(\widehat{\mathbb{C}})$.

José Luis Cisneros Molina
Estela Lara González.

Segundo verano de la Investigación en Matemáticas.
26 de junio de 2017 al 11 de agosto de 2017.

Resumen

Durante la estancia del Segundo Verano bajo la asesoria del Dr. José Luis Cisneros Molina, estudie las transformaciones de Möbius, estas pueden ser vistas de tres formas: como automorfismo de la esfera de Riemann, transformaciones de la forma:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{tal que} \quad a, b, d, c \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad ad - bc \neq 0,$$

y por último como aplicaciones conformes. Donde el grupo de transformaciones de Möbius, que es isomorfo al grupo de automorfismos de la esfera de Riemman, es isomorfo al grupo $PSL(2, \mathbb{C})$. Algunas de sus propiedades principales de estas transformaciones es que actúan en la esfera de Riemann de manera triplemente transitiva, y podemos considerar la composición con la inversión extendida a la esfera de Riemann; otras propiedades son las clases de conjugación, la traza y puntos fijos que nos ayudan a clasificarlas geométricamente. Por último, vimos un poco sobre grupos discontinuos y grupos kleinianos, en particular la relación con las transformaciones de Möbius.
Agradezco al Programa para un Avance Global e Integrado de la Matemática Mexicana, proyecto FORDECyT clave 265667.

Índice

1. La esfera de Riemann. . . . **3**
1.1. Compacidad. . . . 6
1.2. Comportamiento de funciones en el infinito. . . . 7
1.3. Funciones racionales. . . . 13

2. Transformaciones de Möbius. . . . **16**
2.1. Transitividad y razón cruzada . . . 23
2.2. Inversión. . . . 27
2.3. Clases de conjugación en $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$. . . . 30
2.4. Clasificación geométrica de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$. . . . 33
2.5. Conformidad. . . . 34

3. Grupos discontinuos. . . . **38**

1. La esfera de Riemann.

Hay ventajas de usar el conjunto de números complejos $\mathbb{C}$, como dominio de funciones, ya que este es un conjunto algebraicamente cerrado, es decir, dado un polinomio de grado n, tiene n raíces en $\mathbb{C}$ contando multiplicidades. Geométricamente, $\mathbb{C}$ puede ser considerado como $\mathbb{R}^2$ y usualmente es llamado el plano complejo. Antes de continuar, consideremos a R bajo la siguiente propiedad:

Definición 1.1. Diremos que $R \subseteq \mathbb{C}$ es una región si es un conjunto abierto conexo por caminos.

Ahora, consideremos f una función de variable compleja con dominio $\mathbb{C}$, entonces f es infinitamente diferenciable en alguna región $R \subseteq \mathbb{C}$, y para cada $a \in R$, f puede ser expandida como una serie de potencias convergente en algún disco pequeño que contenga a a.

Definición 1.2. Diremos que f es una función analítica sí f es diferenciable sobre una región R.

Algunos libros ocupan la palabra holomorfa o regular para la propiedad de ser analítica. Además notemos que la propiedad de ser holomorfa nos da restricciones sobre como puede ser la función, un resultado sobre esto es el siguiente:

Teorema 1.3 (Liouville, [3, Teo. 2.4.8])**.** *Toda función acotada y holomorfa sobre $\mathbb{C}$, es constante sobre $\mathbb{C}$.*

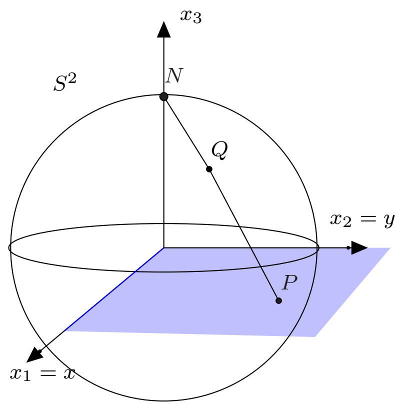
Sin embargo hay desventajas de usar $\mathbb{C}$, como la imposibilidad de dividir por 0, ya que algunas funciones no están definidas en algunas regiones, tal es el caso de z^{-1}; otra desventaja, es que $\mathbb{C}$ no es compacto, ya que ciertas sucesiones no tienen subsucesiones convergentes.
Sea el plano complejo extendido denotado por $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donde ∞ es un punto extra llamado punto al infinito. Geométricamente veremos que $\widehat{\mathbb{C}}$ puede ser identificado como la esfera unitaria mediante la proyección estereográfica, consideremos la esfera de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Identifiquemos el plano complejo $\mathbb{C}$ con el plano $x_3 = 0$ en $\mathbb{R}^3$, identificando $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, con $(x, y, 0)$ para toda $z \in \mathbb{C}$.
Sea $N = (0, 0, 1)$ el polo norte de S^2, sea $Q \in S^2 \setminus \{N\}$ y sea $P \in \mathbb{C}$ tal

que N, Q y P son colineales. Entonces la proyección estereográfica de N está dada por una aplicación:

$$\begin{aligned} \pi\colon S^2 \setminus \{N\} &\to \mathbb{C} \\ Q &\mapsto P \end{aligned}$$



Teorema 1.4. *La proyección estereográfica* $\pi\colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ *está dada por*

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3} \tag{1.1}$$

con inversa

$$\pi^{-1}(x + iy) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \tag{1.2}$$

Por lo tanto π *es un homeomorfismo entre* $S^2 \setminus \{N\}$ *y* $\mathbb{C}$.

Demostración. Primero notemos que π y π^{-1} son de la forma 1.1 y 1.2 respectivamente. Tomemos $P = (x, y, 0) \in \mathbb{C}$ así que $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y sea $Q = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$. Como P, Q, N son colineales por la ecuación simétrica de una recta en el espacio tenemos:

$$\frac{x - 0}{x_1 - 0} = \frac{y - 0}{x_2 - 0} = \frac{0 - 1}{x_3 - 1} \quad \text{es decir} \quad \frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{1}{1 - x_3}$$

Además

$$\frac{x}{x_1} = \frac{1}{1-x_3} \quad \text{despejando} \qquad\qquad x = \frac{x_1}{1-x_3}$$
$$\frac{y}{x_2} = \frac{1}{1-x_3} \quad \text{despejando} \qquad\qquad y = \frac{x_2}{1-x_3}$$

Así que

$$\begin{aligned} \pi\colon S^2 \setminus \{N\} &\to \mathbb{C} \\ Q &\mapsto z = x + iy \end{aligned}$$

y si sustituimos lo anterior $z = \frac{x_1}{1-x_3} + \frac{ix_2}{1-x_3} = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$ lo cual satisface 1.1. Como $Q \in S^2 \setminus \{N\}$ significa que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ así que $x^2 = \frac{x_1^2}{(1-x_3)^2}$ y $y^2 = \frac{x_2^2}{(1-x_3)^2}$. Entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= \frac{x_1^2}{(1-x_3)^2} + \frac{{x_2}^2}{(1-x_3)^2} + 1 \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + (1-x_3)^2}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 - 2x_3}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{2 - 2x_3}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{2}{(1-x_3)^2} \end{aligned}$$

Así que $\pi^{-1}\colon \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$ definida por $\pi^{-1}(P) = Q = (x_1, x_2, x_3)$, donde

$$x = \frac{x_1}{1-x_3} \quad \text{despejando} \quad x_1 = \frac{x}{1-x_3} = \frac{x}{\frac{x^2+y^2+1}{2}} = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$$

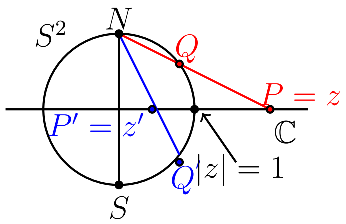
En resumen obtenemos que las entradas de Q son de la forma:

$$x_1 = \frac{2x}{x^2+y^2+1} \quad x_2 = \frac{2y}{x^2+y^2+1} \quad x_3 = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

Así que satisfacen 1.2, por otro lado dadas las expresiones de x_1, x_2, x_3 podemos notar que π y π^{-1} son continuas, así que π es homeomorfismo. $\square$

Ahora fijémonos en $\widehat{\mathbb{C}}$ y ∞, extendamos $\pi\colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ a una biyección $\pi : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ definiendo $\pi(N)$ para ser ∞. Los puntos Q cercanos a N bajo π

corresponden a números $P = z$ con $|z|$ grande así que de algún sentido z es cercano a ∞; por otro lado los puntos Q' cercanos al polo sur $S = (0, 0, -1)$ corresponden a los números complejos z' con $|z'|$ pequeño, cuando $x_3 = 0$ en S^2 corresponde al círculo unitario $|z| = 1$ de $\widehat{\mathbb{C}}$.



Usaremos la biyección $\pi\colon S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ para transferir propiedades algebraicas y topológicas de S^2 a $\widehat{\mathbb{C}}$ y viceversa. El plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}}$ lo llamaremos la esfera de Riemann y por medio de la proyección estereográfica S^2 es homeomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$, utilizaremos libremente este hecho para cambiar puntos de vista entre el plano y $\mathbb{S}^2$ e identificaremos cada punto $Q \in S^2$ con $P = \pi(Q) \in \widehat{\mathbb{C}}$.

1.1. Compacidad.

En la sección anterior vimos que S^2 es homeomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$ por medio de π, ahora justificaremos el hecho de cambiar puntos de vista entre el plano extendido y la esfera.

Definición 1.5. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es una cubierta de X sí $X = \cup\mathcal{U}$. Además si cada uno de estos elementos de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X, diremos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta.

Definición 1.6. Sea (X, τ) un espacio topológico, diremos que X es compacto sí y sólo sí cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Hay aportaciones de Bolzano, Borel, Weierstrass y Lebesgue al conocimiento de la topología de los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$. Ellos mostraron que dado un conjunto K de $\mathbb{R}^n$ las siguientes condiciones son equivalentes:

Teorema 1.7. *[1, Teo. 3.3.1] Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) *(Heine-Borel) K es cerrado y acotado.*

(II) *(Borel-Lebesgue) Cada cubierta $\mathcal{U}$ de K formada por bolas abiertas contiene una subcolección finita $\mathcal{D}$ que aún cubre a K.*

(III) *(Bolzano-Weierstrass) Cada sucesión en K tiene un punto de acumulación.*

Por ejemplo S^2 es compacta, ya que es cerrada y acotada.
Usaremos $\pi\colon S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ una biyección para definir una topología sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ definiendo conjuntos abierto a las imágenes bajo π de conjuntos abiertos de S^2, con la topología usual vista como subespacios de $\mathbb{R}^3$. Así que $\widehat{\mathbb{C}}$ es un espacio topológico y π un homeomorfismo, tenemos lo siguiente:

Teorema 1.8. *[5, Teo. 26.5] $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto.*

Demostración. Dado la imagen de un compacto bajo una aplicación continua es compacta y como S^2 es compacta, π en particular continua así que $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacta.

□

Los conjuntos abiertos de $\widehat{\mathbb{C}}$ son de dos tipos:

1. Conjuntos abiertos de $\mathbb{C}$ en la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

2. Conjuntos de la forma $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \infty$ donde K es cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Entonces la topología de $\mathbb{C}$ inducido por la inclusión en $\widehat{\mathbb{C}}$ concuerda con la topología usual de $\mathbb{C}$. Mostrando así que $\widehat{\mathbb{C}}$ es un punto de compactificación de $\mathbb{C}$, podemos encajar cualquier espacio topológico X en un espacio compacto $X \cup \{\infty\}$ a un punto de compactificación, agregando un sólo punto ∞ y definiendo los conjuntos abiertos de $X \cup \{\infty\}$ para ser los conjuntos abiertos de X junto con aquellos subconjuntos que contienen al ∞ y tienen un complemento, cerrado y compacto en X.

1.2. Comportamiento de funciones en el infinito.

Sea $D \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\{\infty\} \nsubseteq D$ entonces D es un subconjunto de $\mathbb{C}$, por tanto si consideremos una función con dominio D será analítica, meromorfa, que tiene polos, una serie de Taylor, etc, con las definiciones usuales de análisis complejo. Definiremos conceptos similares en ∞, usando la aplicación:

$$\begin{aligned} J : \widehat{\mathbb{C}} &\to \widehat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Notemos que J está bien definada en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, además diremos que $J(0) = \infty$ y $J(\infty) = 0$. Es claro que J es una biyección por como la definimos y además J^2 es la identidad, ya que

$$J^2(z) = J(J(z)) = J\left(\frac{1}{z}\right) = (z^{-1})^{-1} = z$$

para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.
Tomemos $P = z$ de la forma $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $x, y \in \mathbb{R}$ y sea

$$\begin{aligned} P^* &= J(z) \\ &= z^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{\overline{z}}{\overline{z}}\right) \\ &= \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} \\ &= \frac{x + iy}{z\overline{z}} \end{aligned}$$

además $z\overline{z} = x^2 + y^2$.
Sea $Q = \pi^{-1}(P) \colon \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$ el homeomorfismo descrito en 1.2, tenemos $P = (x_1, x_2, x_3) = (\frac{2x}{z\overline{z}+1}, \frac{2y}{z\overline{z}+1}, \frac{z\overline{z}-1}{z\overline{z}+1}) \in \mathbb{R}^3$ y las respectivas coordenadas de $Q^* = \pi^{-1}(P^*)$ son:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{\frac{2x}{x^2+y^2}}{1 + (z\overline{z})^{-1}} \\ &= \frac{2x(z\overline{z})^{-1}}{1 + (z\overline{z})^{-1}} = x_1; \\ x_2^* &= \frac{-2y(z\overline{z})^{-1}}{1 + (z\overline{z})^{-1}} = -x_2 \\ x_3^* &= \frac{1 - \frac{1}{x^2+y^2}}{1 + \frac{1}{x^2+y^2}} \\ &= \frac{1 - (z\overline{z})^{-1}}{1 + (z\overline{z})^{-1}} = x_3 \end{aligned}$$

Por tanto J induce la transformación

$$\begin{aligned} \pi^{-1}J\pi \colon S^2 &\to S^2 \\ (x_1, x_2, x_3) = Q &\mapsto Q^* = (x_1, -x_2, -x_3) \end{aligned}$$

y definimos los siguientes casos

$$\begin{cases} Q = S & \text{entonces} \quad Q^* = 0 \\ Q = N & \text{entonces} \quad Q^* = \infty \end{cases}$$

Esta es la rotación de S^2 por los ángulos π sobre el eje x_1.
Abusando de la notación consideremos $J\colon S^2 \to S^2$ para la rotación de $\pi^{-1}J\pi$, que equivale a identificar S^2 y $\widehat{\mathbb{C}}$ por medio de π respecto de J como una transformación de cada uno de estos espacios.

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "\pi^{-1}J\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & S^2 \arrow[d, "\pi"] \\ \widehat{\mathbb{C}} \arrow[r, "J"'] & \widehat{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

Sea D una "vecindad" de ∞ en $\widehat{\mathbb{C}}$ y supongamos que la función $f(z)$ está definida sobre $D \setminus \{\infty\}$, esto es equivalente, $f(z)$ está definida para $|z|$ suficientemente grande.
Se puede extender el dominio de f para incluir ∞, al definir $f(\infty)$ basta ver que $\lim_{z\to\infty} f(z)$ existe. Entonces f es continua en ∞ y

$$f(\infty) = \lim_{z\to 0} f(z^{-1}) = \lim_{z\to 0}(fJ)(z).$$

Teorema 1.9. *[2, Teo. A.8] Sea f una función analítica sobre una región $R \subseteq \mathbb{C}$ con ceros en una sucesión infinita de puntos z_i la cual tiene un límite $z^* \in R$, entonces f es idénticamente cero en R.*

Definición 1.10. Diremos que f es analítica (o meromorfa) en ∞ sí fJ es analítica (meromorfa) en 0.

Ejemplo 1.11. La función $f(z) = (z^2+1)^{-1}$ es analítica en ∞ con un cero de orden 2 ya que

$$fJ(z) = f(J(z)) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z^2}+1\right)^{-1} = \left(\frac{1+z^2}{z^2}\right)^{-1} = \frac{z^2}{1+z^2}$$

es analítica con un cero de orden 2 en 0.

Definición 1.12. Diremos que $R \neq \emptyset$ es una región de $\widehat{\mathbb{C}}$ si es un subconjunto abierto conexo por caminos.

Se estudiarán estas regiones para poder extender teoremas de funciones definidas sobre $\mathbb{C}$ a funciones definidas sobre $\widehat{\mathbb{C}}$.

Teorema 1.13. *Sea f una función analítica sobre una región R de $\widehat{\mathbb{C}}$. Si f tiene ceros en una sucesión infinita de puntos z_n en R con un límite*

$$z^* = \lim_{n\to\infty} z_n$$

en R, entonces f es idénticamente cero en R.

Demostración. Para eso consideraremos dos casos:

- Si $z^* \neq \infty$ entonces $z_n \neq \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, si omitimos un número finito de términos de la sucesión $\{z_n\}$ podemos suponer que $z_n \in \mathbb{C}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $R' = R \setminus \{\infty\}$ entonces R' es una región de $\mathbb{C}$ (ya que $\{\infty\} \nsubseteq R'$) y f es analítica sobre R' con ceros en una sucesión infinita de puntos $z_n \in R'$ con un límite $z^* \in R'$. Así que por Teorema 1.9, f es idénticamente 0 en R'.

  (I) Si $\infty \notin R$ entonces $R = R'$, con lo cual f es idénticamente 0 en R.

  (II) Si $\infty \in R$ entonces al ser f analítica en ∞ y se anula en una vecindad de ∞. Entonces por la continuidad de f tenemos que $f(\infty) = 0$.

- Si $z^* = \infty$ y omitimos una cantidad finita de términos, suponemos que $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f es analítica en la región $\overline{R} = R \setminus \{0\}$, $f \circ J$ es analítica sobre una región $R^* = \{z^{-1} \colon z \in \overline{R}\}$. Ahora como $f \circ J$ tiene ceros en los puntos z_n^{-1} de R^* y dichos puntos tienen como límite a $J(z^{-1}) = 0$ en R^*, entonces $f \circ J$ es idénticamente 0 en $\overline{R}$ y por lo tanto:

  I) Si $0 \notin R$ entonces $R = \overline{R}$, entonces f es idénticamente cero en R.

  II) Si $0 \in R$ entonces $f(0) = 0$ por la continuidad de f, así f es idénticamente cero sobre R.

$\square$

Ahora veremos como extender el dominio de una función f para incluir ∞. Similarmente, podemos incluir ∞ en la imagen de f.

Definición 1.14. Sea m un entero, diremos que es un polo sí $(z - z_0)^m f(z)$ es acotada en una vecindad de z_0.

Recordemos la definición de función meromorfa en $\mathbb{C}$.

Definición 1.15. Una función se dice meromorfa en un conjunto abierto D y $K \subseteq D$ sí:

1. K no tiene puntos límite en D.

2. Sí f tiene un polo en cada punto de K.

Otra forma de considerar a las funciones es anulando el punto donde se encuentra el polo a, esto es, si $f(z)$ es meromorfa, entonces: $(z-a)^m f(z)$ cumple que es analítica en el punto a, y el orden es m.
En este caso los polos de f corresponden a los ceros de Jf.

Definición 1.16. Decimos que $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ si lo es para cada punto $a \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Así que tenemos:

1. Si f es meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ entonces f es continua sobre $\widehat{\mathbb{C}}$.

2. Cada función constante $f(z) = c \in \mathbb{C}$ es meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, sin embargo, la función constante $f(z) = \infty$ no es meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$.

3. Las funciones meromorfas sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ forman un campo, es decir, si f y g son meromorfismos sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ entonces también lo son $f \pm g, fg, \frac{f}{g}$ con $g \neq 0$.

Supongamos que f es analítica en $a \in \mathbb{C}$, con $f(a) = c \in \mathbb{C}$, si f no es constante entonces $f^{(k)}(a) \neq 0$ para algún $k \geq 1$, y admite k que cumple esto, diremos que es la menor multiplicidad de la solución de $f(z) \in \mathbb{C}$ en $z = a$. Entonces

$$f(z) = c + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^j$$

cerca de $z = a$, con $f^{(k)}(a) \neq 0$. Si f es meromorfismo a $a \in \mathbb{C}$, con un polo de orden k en a, diremos que $f(a) = \infty$ con multiplicidad k; entonces

$$f(z) = \sum_{j=-k}^{\infty} a_j (z-a)^j$$

cerca de $z = a$, con constantes a_j tales que $a_{-k} \neq 0$, y diremos que

$$\sum_{j=-k}^{\infty} a_j (z-a)^j$$

es la parte principal de f en a. Similarmente, si $a = \infty$ entonces diremos que $f(\infty) = c$ tiene multiplicidad k si $(f \circ J)(0) = c$ tiene multiplicidad k; por ejemplo, sí f tiene un polo de orden k en ∞ entonces $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{k} a_j z^j$ cercano a $z = \infty$, con $a_k \neq 0$, $\sum_{j=1}^{k} a_j z^j$ se llama la parte principal de f en ∞. Diremos que a es un punto simple si f tiene multiplicidad $k = 1$ y es un punto múltiple sí $k \geq 1$.

Corolario 1.17. *Una función $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorfa no constante toma cualquier valor dado $c \in \widehat{\mathbb{C}}$ sólo una cantidad de veces finita, contando multiplicidades (es decir, la suma de multiplicidades de las soluciones de $f(z) = c$ es finita).*

Demostración. Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, sí $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ y $f(z) = c$, entonces existe una vecindad N_z de z tal que no toma el valor de c en $N_z \setminus \{z\}$:

1. Sí $c = \infty$ entonces los polos de f son los ceros de $J \circ f$, y como $J \circ f$ es meromorfa y no constante dichos ceros están aislados, por el teorema 1.13.

2. Sí $c \neq \infty$, se usa el hecho de que los ceros de $f - c$ son aislados por el teorema 1.13. Al ser compacto $\widehat{\mathbb{C}}$, esta cubierto por un número finito de las vecindades N_z, digamos $N_{z_1}, N_{z_2}, \ldots N_{z_k}$, así que $f^{-1}(c) = \{z_1, \ldots, z_k\}$ es un conjunto finito. Como f es meromorfa, cada solución de $f(z) = c$ tiene una multiplicidad finita, así que tomamos el valor de c una cantidad de veces finita.

□

Teorema 1.18. *Sean f y g funciones meromorfas de $\widehat{\mathbb{C}}$ con polos en los mismos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ y con las mismas partes principales y en dichos puntos. Entonces $f(z) = g(z) + c$ para alguna constante c. Por lo tanto, las funciones meromorfas sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ están determinadas salvo suma de constantes, por sus partes principales.*

Demostración. Definamos la función meromorfa $h = f - g$ que además es continua sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, como $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto, la imagen $h(\widehat{\mathbb{C}})$ es compacta, además como las partes principales de f y g se cancelan entonces h no tiene polos, así que $h(\widehat{\mathbb{C}}) \subseteq \mathbb{C}$ y siendo compacto es acotado. Por el teorema 1.3 dado que h es holomorfa y acotada, significa que debe ser constante sobre $\mathbb{C}$ y por la continuidad constante sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, por lo tanto $f = g + c$ para alguna constante c. □

De este resultado se sigue la versión del producto de funciones.

Teorema 1.19. *Sea f y g funciones meromorfas sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ con ceros y polos del mismo orden en los mismos puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Entonces $f(z) = cg(z)$ para alguna constante $c \neq 0$.*

Demostración. Supongamos que tanto como f como g no son idénticamente cero, así que $\frac{f}{g}, \frac{g}{f}$ son meromorfas sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ y ninguna tiene polos en $\mathbb{C}$, así que ambas son analíticas sobre $\widehat{\mathbb{C}}$. Al menos alguna de esas funciones fracciones es finita en ∞, supongamos sin pérdida de generalidad que es $\frac{f}{g} = h$, así que h es analítica sobre $\widehat{\mathbb{C}}$; y por el teorema 1.3, h es constante, así que $f = gc$ para alguna constante c, notemos por último que $c \neq 0$ ya que f no es idénticamente a 0. □

Observación 1. En la hipótesis del teorema anterior no es necesario suponer que el comportamiento de f y g es similar en ∞, sino que esto pasa ya que $f = gc$.

1.3. Funciones racionales.

Definición 1.20. Diremos que una función es racional si es de la forma

$$f(z) = p(z)/q(z)$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios con coeficientes complejos y $q(z)$ no es idénticamente cero.

Cuando $z \in \mathbb{C}$ y $q(z) \neq 0$, $f(z)$ es un elemento bien definido en $\mathbb{C}$; cuando $q(z) = 0$ ó $z = \infty$, se define $f(z) = \lim_{z' \to z} f(z')$ como en la sección 1.2. Así que $f \colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$.
Las funciones racionales forman un campo denotado por $\mathbb{C}(z)$. Además para cada elemento fijo $a \in \mathbb{C}$ la función constante $f_a(z) = a$ para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es una función racional y estas funciones forman un campo isomorfo a $\mathbb{C}$ bajo el isomorfismo $f_a(z) = a$. Entonces $\mathbb{C}(z)$ contiene un subcampo isomorfo a $\mathbb{C}$, así $\mathbb{C}(z)$ se comporta como una extensión de campo de $\mathbb{C}$.

Definición 1.21. Diremos que los polinomios $p(z)$ y $q(z)$ son co-primos sí no hay un polinomio constante $r(z) \neq 0$ que divida a $p(z)$ y $q(z)$.

Sí $p(z)/q(z)$ es una función racional se puede cancelar cualquier factor común y entonces se asumirá que p y q son co-primos. Por el teorema fundamental del álgebra, un polinomio se puede expresar como el producto de factores lineales, es decir, se puede escribir:

$$f(z) = c(z - \alpha_1)^{m_1} \dots (z - \alpha_r)^{m_r} (z - \beta_1)^{-n_1} \dots (z - \beta_s)^{-n_s} \tag{1.3}$$

donde $c \in \mathbb{C}$, $\alpha_1 \dots \alpha_r$ son los ceros de p de ordenes $m_1, \dots, m_r$ y $\beta_1, \dots, \beta_s$ son los ceros de q de ordenes $n_1, \dots, n_s$. Como p y q son co-primos, los ceros de p son distinto a los de q. Entonces $\alpha_1 \dots \alpha_r$, son ceros de f de ordenes $m_1, \dots, m_r$ y $\beta_1, \dots, \beta_s$ son polos de f de ordenes $n_1, \dots, n_s$. Estos son los únicos ceros y polos de f en $\mathbb{C}$, y ∞ es un cero o un polo como $(m_1 + \dots + m_r) - (n_1 + \dots + n_s)$ es negativo o positivo.

Ejemplo 1.22. La función $f(z) = (z-1)/(z^2+4)$ tiene ceros de orden 1 en 1 y ∞, con polos de orden 1 en $\pm 2i$.

El siguiente resultado nos mostrará una equivalencia de la definición algebraica de función racional y la condición de analícidad.

Teorema 1.23. *Cualquier función $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es racional sí y sólo sí es meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Supongamos que $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es racional, la descomponemos en factores lineales como en la ecuación 1.3, entonces f es diferenciable en cada $z \neq \infty$, con cada β_j donde $1 \leq j \leq s$, con lo cual f es analítica sobre $\mathbb{C} \setminus \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$. En cada β_j, f tiene un polo de orden n_j, mientras en ∞, f es analítica sí $deg(p) \leq deg(q)$ y f tiene un polo de orden $deg(p) > deg(q)$. Por tanto f es meromorfa.
Por otro lado sí f es meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$. Por corolario 1.17, f tiene una cantidad finita de polos en $\mathbb{C}$, diremos que $\beta_1, \dots, \beta_s$ de ordenes $n_1, \dots, n_s$. Entonces la función:

$$g(z) = (z-\beta_1)^{n_1} \dots (z-\beta_s)^{n_s} f(z)$$

es analítica sobre $\mathbb{C}$, entonces g tiene una expansión de Taylor:

$$g(z) = a_0 + a_1 z_{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$$

esto se cumple para todo $z \in \mathbb{C}$. Ahora g es meromorfa en ∞, ya que f lo es; entonces

$$(gJ)(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^2 + \cdots$$

es meromorfa en 0, y entonces $a_j = 0$ para toda j suficientemente grande. Entonces g es un polinomio, así

$$f(z) = g(z)(z-\beta_1)^{-n_1} \dots (z-\beta_s)^{-n_s}$$

es una función racional. □

Si $f = p/q$ es una función racional, con polinomios co-primos $p(z)$ y $q(z)$ entonces el grado (u orden) $deg(f)$ de f es el máximo de los grados de p y q. Por tanto f es constante sí y sólo sí $deg(f) = 0$.

Teorema 1.24. *Si $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una función racional de grado $d > 0$, entonces f toma cada valor de $c \in \widehat{\mathbb{C}}$ exactamente d veces, contando multiplicidades.*

Demostración. Sea $f = p/q$ es una función racional, con polinomios $p(z)$ y $q(z)$ co-primos.
Primero supongamos que $c = \infty$. Para $z \in \mathbb{C}$ tenemos que $f(z) = \infty$ sí y sólo sí $q(z) = 0$ y por el teorema fundamental del álgebra esta ecuación tiene $deg(q)$ soluciones, contando multiplicidades. Sí el $deg(p) \leq deg(q)$ entonces estos son los únicos polos de f, sí $deg(p) > deg(q)$ entonces f tiene un polo adicional de orden $deg(p) - deg(q)$ en ∞. En cualquier otro caso, el número de soluciones, contando multiplicidades, de $f(z) = \infty$ es $max(deg(p), deg(q)) = deg(f)$.
Ahora supongamos que $c \neq \infty$, como $deg(f) > 0$, f no es idénticamente c, entonces existe una función racional, que se puede expresar como:

$$g = \frac{1}{f - c} = \frac{q}{p - cq};$$

Las soluciones de $f(z) = c$ son los polos de g, y por argumento previo hay $deg(g)$, contando multiplicidades. Ahora $q(z)$ y $(p - cq)(z)$ son polinomios co-primos, ya que $p(z)$ y $q(z)$ lo son, así que

$$deg(g) = max(deg(q), deg(p - cq)) = max(deg(q), deg(p)) = deg(f).$$

□

Sea f una función meromorfa en $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ y sea $f(a) = c$. Recordemos que a es un punto múltiple para f sí la ecuación $f(z) = c$ tiene solución múltiple en $z = a$; pero si $c \neq \infty$, esto equivale a $f'(a) = 0$, mientras que si $c = \infty$ entonces equivale a que f tenga un polo de orden de al menos 2 en a. Todos los demás puntos se llaman puntos simples para f.

Corolario 1.25. *Sea $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional de grado $d > 0$, entonces:*

1. *f tiene sólo una cantidad finita de puntos múltiples en $\widehat{\mathbb{C}}$.*
2. *$|f^{-1}(c)| = d$ para una cantidad finita de puntos en $\mathbb{C}$, y $1 \leq | f^{-1}(c) | < d$ para los puntos restantes c.*

Demostración. Sea $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional de grado $d > 0$

1. Como la derivada de f' es racional y no idénticamente 0, f' tiene sólo una cantidad finita de ceros en $\widehat{\mathbb{C}}$, como f tiene una cantidad finita de polos, entonces f también tiene una cantidad finita de puntos múltiples en $\widehat{\mathbb{C}}$.

2. Por Teorema 1.24, sí $c \in \widehat{\mathbb{C}}$ entonces existen soluciones, $z = a_1, \ldots, a_r$ de $f(z) = c$ con multiplicidades $k_1, \ldots, k_r$ que satisface $k_1 + \ldots + k_r = d$, entonces $|f^{-1}(c)| = r$ de modo que $1 \leq |f^{-1}(c)| \leq d$, entonces tenemos que $\mid f^{-1}(c) \mid = d$ a lo más para algunos $k_j \geq 2$. Como f tiene una cantidad finita de puntos múltiples, por 1. se sigue 2..

$\square$

Definición 1.26. Decimos que dado $T\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es un automorfismo de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ sí es una biyección meromorfa.

El conjunto de todos los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ lo denotaremos por $Aut(\widehat{\mathbb{C}})$.

2. Transformaciones de Möbius.

Definición 2.1. Diremos que $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una transformación de Möbius si es la siguiente forma:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{tal que} \quad a,b,d,c \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad ad - bc \neq 0. \tag{2.1}$$

El conjunto de todas las transformaciones de Möbius lo denotaremos por $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$.
Las transformaciones 2.1 también son llamadas transformaciones fracciones lineales. Notemos que si vemos sólo como conjuntos $Aut(\mathbb{C})$ y $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2. *$Aut(\widehat{\mathbb{C}}) = Möb^+(\widehat{\mathbb{C}})$.*

Demostración. La prueba la haremos por contención.
Veamos que $Aut(\mathbb{C}) \subseteq \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$:
Sea $U\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ un automorfismo de la esfera de Riemann. Por Teorema 1.23 como U es meromorfa implica que es racional y por Corolario 1.25 al ser U una biyección implica que es de grado 1. Por tanto los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ son funciones $U(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde $az + b$ y $cz + d$ son polinomios co-primos, ya que son funciones de grado uno, así que $ad - bc \neq 0$.
Para la otra contención, $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}}) \subseteq Aut(\mathbb{C})$.

Sea $T \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que satisface 2.1, la cual es continua ya que al dividir $cz+d$ sobre z

$$\frac{az+b}{\frac{cz+d}{z}} = \frac{az+b}{c+\frac{d}{z}}$$

tenemos

$$\lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{\frac{cz+d}{z}} = \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{c}$$

donde $\frac{az+b}{c}$ es continua, y por Corolario 1.25 T es biyectiva.
Por tanto $T \in Aut(\mathbb{C})$ $\square$

Observación 2. Cabe notar que los coeficientes a, b, c, d no determinan de manera única a T, ya que si tomamos $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ arbitrario, $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$ también corresponden a la misma transformación T.

A continuación definiremos la operación composición, sean

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad U(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

dos transformaciones de Möbius arbitrarias, entonces

$$(UT)(z) = \frac{(a'a+b'c)z+(a'b+b'd)}{(c'a+d'c)z+(c'b+d'd)} \tag{2.2}$$

y propongamos $r = a'a+b'c,\ s = c'b+d'd,\ t = a'b+b'd,\ v = c'a+d'c$ notemos que

$$\begin{aligned} rs - tv &= (a'a+bc')(c'b+dd') - (a'b+b'd)(c'a+d'c) \\ &= a'ac'b + a'ad'd + b'cc'b + b'cd'd \\ &\ - a'bc'a - a'bd'c - b'dc'a - b'dd'c \\ &= a'd'ad - a'd'bc - b'c'ad + bcb'c' \\ &= (a'b' - b'c')(ad-bc) \neq 0 \end{aligned}$$

Proposición 2.3. *$\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ forma un grupo bajo la composición.*

Demostración. Por como se define la composición, se satisface que para toda $U, T \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ entonces $UT \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, es decir, $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ es cerrado bajo la composición. Además la transformación identidad es $Id(z) = \frac{az}{d}$ donde $b = c = 0$ y $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. La transformación inversa será $T^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$, ya que

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \frac{(da-bc)z+db-db}{(-ca+ac)z-cb+ad} \\ &= \frac{(da-bc)z}{ad-bc} \\ &= z \end{aligned}$$

Por tanto $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ es un grupo bajo la composición. $\square$

Corolario 2.4. *$\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ es un grupo de homeomorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ en sí mismos.*

Demostración. Por proposición 2.3, $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ es un grupo y por teorema 2.2 y la definición 1.26, los elementos de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ son funciones biyectivas los automorfismos de la esfera de Riemann, así que resta probar que f y f^{-1} son continuas,; y cada automorfismo T es una función meromorfa y $T^{-1} \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ esto implica que T continua, por consiguiente también T^{-1} es continua, por tanto T es homeomorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$ en sí mismo. $\square$

Cabe mencionar que hay una fuerte conexión entre las transformaciones de Möbius y las matrices, sean:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad U(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

transformaciones de Möbius arbitrarias y sus matrices correspondientes

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Entonces la composición UT corresponde con el producto de matrices, es decir,

$$NM = \begin{pmatrix} a'a+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+d'd \end{pmatrix}$$

Definición 2.5. El grupo general lineal $GL(2,\mathbb{C})$ es el conjunto de las matrices 2×2 con entradas complejas

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{donde el } \; det(M) = ad - bc \neq 0.$$

Definición 2.6. Definimos el grupo especial lineal $SL(2,\mathbb{C})$, como el conjunto de las matrices 2×2 con entradas complejas

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{donde el } \; det(M) = ad - bc = 1.$$

A continuación usaremos el siguiente resultado sobresaliente de grupos.

Teorema 2.7 (Primer Teorema de Isomorfismos, [6, Teo. 2.24])**.** *Sea $f\colon G \to H$ un homomorfismo de grupos con núcleo K. Entonces K es un subgrupo normal de G y $G/K \cong Imf$.*

Sea $PGL(2,\mathbb{C})$ el grupo general lineal proyectivo y $PSL(2,\mathbb{C})$ el grupo especial lineal proyectivo.

Teorema 2.8. *$Möb^+(\widehat{\mathbb{C}}) \cong PGL(2,\mathbb{C}) = PSL(2,\mathbb{C})$.*

Demostración. Sea $\theta\colon GL(2,\mathbb{C}) \to \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ una aplicación, donde a cada $M \in GL(2,\mathbb{C})$, a $\theta(M)$ le asociamos la transformación de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, θ está bien definida, cabe notar que

$$\theta(NM) = UT = \theta(N)\theta(M)$$

así que θ es un homomorfismo de grupos, más aún θ es epimorfismo ya que es sobreyectivo.
Denotemos

$$\begin{aligned} K &= Ker(\theta) \\ &= \{M \in GL(2,\mathbb{C}) \mid T(z) = z \ \ \forall z \in \widehat{\mathbb{C}}\} \\ &= \{M \in GL(2,\mathbb{C}) \mid \theta(M) = Id\} \\ &= \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

Donde Id es la transformación identidad en $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ e I es la matriz identidad en $GL(2,\mathbb{C})$. Hecha la observación 2, diremos que dadas dos matrices $M, N \in GL(2,\mathbb{C})$ determinan el mismo automorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$ sí y sólo sí $M = \lambda N$ para algún $\lambda \neq 0$.
Por el Primer teorema de isomorfismos 2.7 tenemos que K es subgrupo normal de $GL(2,\mathbb{C})$ y $GL(2,\mathbb{C})/K \cong Im\theta = \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$.

$$\begin{tikzcd} GL(2,\mathbb{C}) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\nu"'] & \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}}) \\ GL(2,\mathbb{C})/K \arrow[ur, dashed, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $PGL(2,\mathbb{C})$ el grupo proyectivo lineal es el grupo cociente $GL(2,\mathbb{C})/K$. Dado que $det(NM) = det(N)det(M)$ para toda $M, N \in GL(2,\mathbb{C})$, consideremos la función:

$$det\colon GL(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

un homomorfismo de grupos y su kernel es el grupo especial lineal $SL(2,\mathbb{C})$ el cual consiste de matrices $M \in GL(2,\mathbb{C})$ tal que $det(M) = 1$. Como det es sobre, y de nuevo por teorema 2.7 tenemos $GL(2,\mathbb{C})/SL(2,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$, donde $Im(det) = \mathbb{C}^*$.

$$\begin{tikzcd}
GL(2,\mathbb{C}) \arrow[r, "det"] \arrow[d, "\nu"'] & \mathbb{C}^* \\
GL(2,\mathbb{C})/K \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $N \in GL(2,\mathbb{C})$ entonces se puede escribir $N = \lambda M$ donde $\lambda^2 = det(N)$ y $M \in SL(2,\mathbb{C})$. Como $\theta(M) = \theta(N)$, esto demuestra que toda transformación de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ es de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con} \quad ad - bc = 1 \tag{2.3}$$

equivalentemente, θ manda $SL(2,\mathbb{C})$ a $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$. Entonces $PGL(2,\mathbb{C})$ coincide con el grupo proyectivo especial lineal $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\pm I$, la imagen de $SL(2,\mathbb{C})$ en el grupo cociente $PGL(2,\mathbb{C})/K$, por lo tanto:

$$\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}}) \cong PGL(2,\mathbb{C}) = PSL(2,\mathbb{C})$$

□

Usaremos este isomorfismo para identificar $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ con $PGL(2,\mathbb{C})$.

Definición 2.9. Diremos que $T \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, de la forma 2.1 está normalizada sí al multiplicar sus coeficientes por $k = \pm\frac{1}{\sqrt{ad-bc}}$ tenemos $ad - bc = 1$.

A continuación se estudiaran propiedades interesantes de las transformaciones $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, en algunos casos es mejor normalizarla y en otros no lo es necesario, según nos convenga.
Las transformaciones de la forma

$$T(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - dc \neq 0$ son conocidas como las transformaciones antimöbius de $\widehat{\mathbb{C}}$.
Las transformaciones elementales de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ son:

- **Traslación**: $T_a \colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ definida de la siguiente manera $T_a(z) = z + a$, con $a \in \mathbb{C}$, fija ∞ y actúa en el plano $\mathbb{C}$.

- **Homotecia**: $U_b\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ definida de la siguiente manera $U_b(z) = bz$, con $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta transformación fija 0 y ∞, actúa sobre el plano $\mathbb{C}$ donde expande o contrae distancias por un factor b.
- **Rotación**: $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ con $\theta \in \mathbb{R}$ representa una rotación de la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ por el ángulo θ.
- **Inversión** :$J\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ definida de la siguiente manera $J(z) = \frac{1}{z}$.

Teorema 2.10. *Cualquier transformación de Möbius es la composición de una cantidad finita de transformaciones elementales.*

Demostración. Sea m una transformación de Möbius de la forma

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0$$

notemos que mediante operaciones m equivale a

$$m(z) = -\left(\frac{ad-bc}{c^2}\right)\left(\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right) + \frac{a}{c}$$

es decir, m se puede escribir como la composición

$$m(z) = T_{\frac{a}{c}} U_s J T_{\frac{d}{c}}(z) \quad \text{donde} \quad s = -\left(\frac{ad-bc}{c^2}\right)$$

□

Cabe notar que cualquier círculo de la esfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ está definido por cualquier intersección $S^2 \cap P$ donde P es un plano de $\mathbb{R}^3$ y $|S^2 \cap P| > 1$; notemos que hay dos tipos de círculos en $\widehat{\mathbb{C}}$: círculos euclidianos y los conjuntos de la forma $\Lambda \cup \{\infty\}$, donde Λ es una línea recta en $\mathbb{C}$. Además, bajo la proyección estereográfica la colección de círculos y líneas en $\widehat{\mathbb{C}}$ se identifican con círculos de S^2. La conexión entre $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ y los círculos de $\widehat{\mathbb{C}}$ está dada por el siguiente resultado:

Teorema 2.11. *Sea $m \in Möb^+(\widehat{\mathbb{C}})$, sí C es un círculo de $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces $m(C)$ es un círculo de $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Dadas las transformaciones elementales basta probarlo para la inversión, rotación, homotecia y traslación, para las tres últimas es sencillo pensarlo geométricamente, pero el caso de una transformación inversión, se desarrollará a continuación.
Sea un círculo que no pasa por ∞ con radio $r > 0, r \in \mathbb{R}$ y centro $a \in \mathbb{C}$, tiene

ecuación $\mid z - a \mid^2 = r^2$. Así que el círculo bajo la inversión $m(z) = z^{-1} = w$ son los puntos que satisfacen lo siguiente:

$$|\frac{1}{w} - a|^2 = r^2 \quad \text{entonces} \quad |1 - aw|^2 = r^2|w|^2$$

desarrollando tenemos:

$$\begin{aligned}(1 - aw)\overline{(1 - aw)} &= r^2|w|^2 \\ 0 &= 1 - aw - \overline{aw} + aw(\overline{aw}) - r^2|w|^2 \\ 0 &= 1 - aw - \overline{aw} + (|a|^2 - r^2)|w|^2 \\ 0 &= 1 - aw - \overline{aw} + (|a|^2 - r^2)(u^2 + v^2) \\ 0 &= (|a|^2 - r^2)(u^2 + v^2) + 1 - 2Re(a)u - 2Im(a)v\end{aligned}$$

Donde $w = u + iv$ y $a \in \mathbb{C}$ es de la forma $a = Re(a) + Im(a)$. De lo cual tenemos dos casos:

- Si $r = |a|$ entonces es una recta $-2Re(a)u + 2Im(a)v + 1 = 0$.
- Sí $r \neq |a|$ entonces es un círculo

$$0 = (\mid a \mid^2 - r^2)(u^2 + v^2) + 1 - 2Re(a)u - 2Im(a)v.$$

Consideremos ahora la ecuación general de la recta $Ax + By = C$ donde $z = x + iy$ y $m(z) = w = u + iv$, y notar que $x = \frac{u}{|w|^2}$ y $y = \frac{v}{|w|^2}$ así que son los puntos que satisfacen la ecuación general de la recta son:

$$A\frac{u}{|w|^2} - B\frac{v}{|w|^2} = C$$

Entonces

$$Au - Bv = C(u^2 + v^2) \tag{2.4}$$

al evaluar la ecuación 2.4 nos da los siguientes casos:

- Si $C \neq 0$, entonces 2.4 es un círculo.
- Sí $C = 0$, entonces 2.4 es una recta que pasa por el origen.

$\square$

2.1. Transitividad y razón cruzada

Definición 2.12. Si (z_1, z_2, z_3, z_4) es una 4-upla de puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, la razón cruzada se define como:

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}$$

.

Tomando el límite cuando $z_i = \infty$ para $i = 1, 2, 3, 4$ tenemos:

(1) $[\infty : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)}$;

(2) $[z_1 : \infty : z_3 : z_4] = \frac{(z_4 - z_1)}{z_3 - z_1}$;

(3) $[z_1 : z_2 : \infty : z_4] = \frac{(z_4 - z_1)}{(z_4 - z_2)}$;

(4) $[z_1 : z_2 : z_3 : \infty] = \frac{(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_1)}$.

Teorema 2.13. *Si z_1, z_2, z_3 son tres puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces hay una única transformación $m \in$ Möb$^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que:*

$$m(z_1) = 0, \quad m(z_2) = \infty, \quad m(z_3) = 1.$$

Demostración. Sea $m(z) = [z_1 : z_2 : z_3 : z]$. En cada caso, $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ y m envía z_1, z_2, z_3 a $0, \infty, 1$ respectivamente.
Afirmamos que m es única.
Por contradicción, supongamos que existe $f \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que

$$f(z_1) = 0, \quad f(z_2) = \infty, \quad f(z_3) = 1,$$

entonces fm^{-1} fija a $0, \infty, 1$ así que

$$fm^{-1}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Sustituyendo $0, 1, \infty$ tenemos:

$$fm^{-1}(0) = \frac{b}{d} = 0 \tag{2.5}$$

$$fm^{-1}(1) = \frac{a + d}{c + d} = 1 \tag{2.6}$$

$$fm^{-1}(\infty) = \infty \tag{2.7}$$

de 2.5 implica que $b = 0$ y $d \neq 0$, mientras de 2.7 $c = 0$ y entonces de 2.6 tenemos que a, d son distintos de 0. Por tanto, fm^{-1} es la identidad y así $f = m$. $\square$

Corolario 2.14. *Sean* $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2,\ w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$*,* (z_1, z_2, z_3) *y* (w_1, w_2, w_3) *dos tripletes donde* z_i, w_j *son distintos entre sí respectivamente para cada* $i, j = 1, 2, 3,$*. Entonces existe una única transformación* $f \in$ *Möb*$^+(\widehat{\mathbb{C}})$ *tal que* $f(z_j) = w_j$ *para cada* $j = 1, 2, 3$.

Demostración. Por el teorema 2.13, existen $m_1, m_2 \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tales que:

$$m_1(z_1) = m_2(w_1) = 0, \quad m_1(z_2) = m_2(w_2) = \infty \quad m_1(z_3) = m_2(w_3) = 1$$

Sea $m = m_2^{-1}m_1 \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ envía z_j a w_j para $j = 1, 2, 3$. Por unicidad de m_1 y m_2, también m es único. □

Corolario 2.15. *Si* $m \in$ *Möb*$^+(\widehat{\mathbb{C}})$ *fija tres puntos distintos de* $\widehat{\mathbb{C}}$, *entonces* m *es la identidad.*

Demostración. Si $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ fija z_1, z_2, z_3, entonces m y la identidad Id se envían en sí mismo para cada $j = 1, 2, 3$, luego por unicidad del corolario 2.14 tenemos que $m = Id$. □

Teorema 2.16. *Sean* (z_0, z_1, z_2, z_3) *y* (w_0, w_1, w_2, w_3) *dos 4-uplas de elementos distintos de* $\widehat{\mathbb{C}}$*. Entonces existe* $m \in$ *Möb*$^+(\widehat{\mathbb{C}})$ *tal que* $m(z_j) = w_j$ *con* $j = 0, 1, 2, 3$*, sí y sólo sí* $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [w_0, w_1, w_2, w_3]$.

Demostración. Supongamos que existe $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $m(z_j) = w_j$ para $j = 0, 1, 2, 3$. Entonces $f(z) = [w_0, w_1, w_2, w_3]$ es el único elemento de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ que envía w_0, w_1, w_2 a $0, \infty, 1$ respectivamente . Entonces fm es un elemento de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ que envía z_0, z_1, z_2 a $0, \infty, 1$, respectivamente, es decir, $fm(z) = [z_0 : z_1 : z_2 : z]$, entonces,

$$[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = fm(z_3) = f(w_3) = [w_0 : w_1 : w_2 : w_3]$$

A la inversa, sí $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [w_0 : w_1 : w_2 : w_3] = \lambda$, entonces existe $f, h \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que manda las 4-uplas z_0, z_1, z_2, z_3 y w_0, w_1, w_2, w_3 a $0, \infty, 1, \lambda$. Sea $m = f^{-1}h$, satisface que $f^{-1}h(z_j) = w_j$, con $i = 0, 1, 2, 3$. □

Corolario 2.17. *Sea* (z_0, z_1, z_2, z_3) *una 4-upla de elementos distintos de* $\widehat{\mathbb{C}}$ *y* $(0, \infty, 1, z)$ *otra 4-upla con* $z \in \mathbb{C}$ *distinto de* $0, \infty$ *y 1. Entonces, existe* $m \in$ *Möb*$^+(\widehat{\mathbb{C}})$ *tal que* $m(z_0) = 0$*,* $m(z_1) = \infty$*,* $m(z_2) = 1$ *y* $m(z_3) = z$ *sí y sólo sí* $z = [z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$.

Demostración. Por el teorema 2.16, tenemos que existe $g \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $m(z_0) = 0, m(z_1) = \infty, m(z_2) = 1$, $m(z_3) = z$, sí y sólo sí

$$[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [0 : \infty : 1 : z]$$

pero $[0 : \infty : 1, z] = z$, entonces tenemos el resultado. □

Definición 2.18. Sea G un grupo y A un conjunto, diremos que G actúa transitivamente sí para cada $a_1, a_2 \in A$ existe $g \in G$ tal que $g(a_1) = a_2$.

Esta definición la podemos generalizar:

Definición 2.19. Diremos que G actúa $k-$transitivamente sobre A si para cualquier k-uplas $(a_1, \dots, a_k)$ y $(a'_1, \dots, a'_k)$ de elementos de A, donde $a_i \neq a'_j$ para toda $i, j \in \{1, \dots, k\}$ con $j \neq i$, existe $g \in G$ tal que

$$g(a_1, \dots, a_k) = (a'_1, \dots, a'_k)$$

Teorema 2.20. *El grupo de Möb*$^+(\widehat{\mathbb{C}})$ *manda circunferencias en* $\widehat{\mathbb{C}}$ *transitivamente, es decir, si* C *y* C' *son círculos de* $\widehat{\mathbb{C}}$*, entonces existe* $m \in$ *Möb*$^+(\widehat{\mathbb{C}})$ *tal que* $m(C) = C'$.

Demostración. Sean z_1, z_2, z_3 puntos en C y z_3, z_4, z_5 puntos en C', entonces, por el corolario 2.14, existe $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ que manda z_1, z_2 y z_3 en z_4, z_5 y z_6 respectivamente, pero por la proposición 2.11, m manda círculos en círculos, entonces $m(C) = C'$. $\square$

Definición 2.21. Sea U un conjunto abierto en $\widehat{\mathbb{C}}^k$, diremos que $f\colon U \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una función invariante bajo transformaciones de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ sí para toda $(z_1, \dots, z_k) \in U$ y $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ satisface:

$$f(z_1, \dots, z_k) = f(m(z_1), \dots, m(z_k))$$

En particular, U es invariante bajo $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, sí cualquier $(z_1, \dots, z_k) \in U$ y cualquier $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, entonces :

$$(m(z_1), \dots, m(z_k)) \in U.$$

La $3-$transitividad de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ implica que si $1 \leq n \leq 3$ las funciones invariantes bajo $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ de varias variables son las funciones constantes. Pero para el caso de $n \geq 4$ tenemos un caso interesante, un ejemplo de una función invariante bajo $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ es la razón cruzada, de la cual hemos estado hablando y con esta propiedad podemos caracterizar los círculos de $\widehat{\mathbb{C}}$ de la siguiente manera:

Teorema 2.22. *Sea* C *un círculo dado por tres puntos distintos* $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$. *Entonces* $C = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid [z : z_1 : z_3 : z_4] \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$

Demostración. Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $m(z_j) = 0, 1, \infty$ para $j = 1, 2, 3$. Entonces $m(z) = [z : z_1 : z_2 : z_3]$ así que $z \in C$ sí y sólo sí

$$[z : z_1 : z_2 : z_3] \in m(C).$$

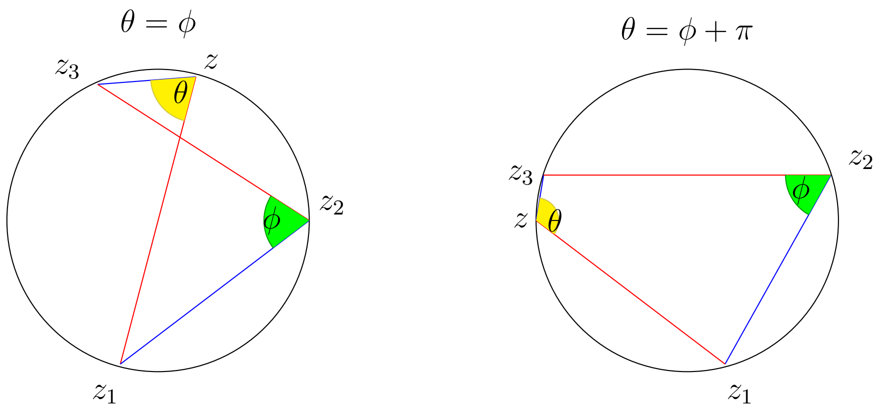
Pero $m(C)$ es un círculo bajo $0, 1, \infty$, así que $m(C) = \mathbb{R} \cup \infty$. $\square$

Este resultado se puede interpretar geométricamente, para lo cual supongamos que $\infty \notin C$, así que C es un círculo euclidiano en $\mathbb{C}$, consideremos θ el ángulo entre los vectores $z - z_1$ y $z - z_3$ en $\mathbb{C}$, y ϕ el ángulo entre $z_2 - z_1$ y $z_2 - z_3$. Como

$$\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)} = \frac{\frac{(z-z_1)}{(z-3)}}{\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}}$$

denotemos la razón cruzada por λ, con lo cual tenemos que

$$\begin{aligned} arg(\lambda) &= (arg(z - z_1) - arg(z - z_3)) - (arg(z_2 - z_1) - arg(z_2 - z_3)) \\ &= \theta - \phi. \end{aligned}$$



Sí $\infty \in C$ entonces $C \setminus \{\infty\}$ es una línea euclidiana en $\mathbb{C}$, y el teorema anterior expresaría una condición para que los puntos z, z_1, z_2, z_3 sean colineales.
Al principio calculamos la razón cruzada tomando ∞, notemos ahora que es fácil calcular la siguiente razón cruzada:

$$[\infty : 0 : 1 : z] = \frac{1}{1 - z} = \frac{1 - \overline{z}}{\mid 1 - z \mid^2}$$

En particular, tenemos que $[\infty : 0 : 1 : z]$ es real sí y sólo sí $\overline{z}$ es real, es decir, z es real. Un resultado interesante combinando el teorema anterior y la observación obtenemos.

Proposición 2.23. *Sean z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos en $\widehat{\mathbb{C}}$, la razón cruzada $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$ es real sí y sólo sí z_1, z_2, z_3, z_4 pertenecen a un círculo de $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Sean z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos en $\widehat{\mathbb{C}}$ y por el teorema 2.13 existe $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que

$$m(z_1) = \infty, \quad m(z_2) = 0, \quad m(z_3) = 1$$

además notemos que $m(z_1)=\infty, m(z_2)=0, m(z_3)=1$ y $m(z_4)$ pertenecen a un círculo de $\widehat{\mathbb{C}}$, digamos C, sí y sólo sí $[m(z_1):m(z_2):m(z_3):m(z_4)]$ es real. Como $[z_1:z_2:z_3:z_4]=[m(z_1):m(:m(z_2):m(z_3):m(z_4)]$ y por teorema 2.20, entonces z_1,z_2,z_3,z_4 pertenecen a un círculo en $\widehat{\mathbb{C}}$ sí y sólo sí $[z_1:z_2:z_3:z_4$ es real. $\square$

2.2. Inversión.

Sea C un círculo de $\widehat{\mathbb{C}}$ con ecuación

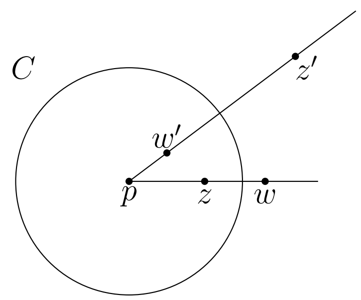
$$az\overline{z}+bz+\overline{b}\overline{z}+c=0 \quad \text{con} \quad a,c\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{C}$$

Si $a\neq 0$, entonces C es un círculo euclidiano en $\mathbb{C}$, sea p el centro y r el radio de C. Entonces para cada $z\in\mathbb{C}\setminus\{p\}$ hay un único punto w sobre la línea dada por p y z tal que

$$|z-p||w-p|=r^2$$

donde w y z están del mismo lado que p. La inversión de C esta dada por $I_C\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ con $I_C(z)=w$, donde w es el conjugado de z con respecto a C.

1. Sí $z\to p$ entonces $w\to\infty$.
2. Sí $z\to\infty$ entonces $w\to p$.



Afirmación 2.24. *I_C se puede extender a $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Definiendo $I_C(p)=\infty$ y $I_C(\infty)=p$. Entonces I_C^2 es la identidad y además $I_C(z)=z$ sí y sólo sí $z\in C$. A partir de esto, podemos encontrar una ecuación para I_C.
Sí $z\neq p,\infty$ entonces:

$$|(\overline{z}-\overline{p})(w-p)|=|z-p||w-p|=r^2$$

así que $arg(\overline{z}-\overline{p})=arg(z-p)$, entonces $arg(\overline{z}-\overline{p})(z-p)=0$. Con lo cual

$$(w-p)(\overline{z}-\overline{p})=r^2$$

donde

$$\begin{aligned} I_C(z) &= w \\ &= p + \frac{r^2}{(\overline{z} - \overline{p})} \end{aligned}$$

Tenemos que $p = -\frac{\overline{b}}{a}$ y $r^2 = \frac{(b\overline{b} - ac)}{a^2}$ por tanto

$$w = I_C(z) = -\frac{\overline{b}\overline{z} + c}{a\overline{z} + b} \tag{2.8}$$

Está ecuación también se vale para $z = p$ y $z = \infty$, entonces para toda $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, mostramos que I_C es una transformación anti-möbius, es decir, $I_C \in PG(2, \mathbb{C})$. Sí $a = 0$, entonces $C \setminus \{\infty\}$ es la línea euclidiana

$$bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0$$

usando la ecuación 2.8, definimos una transformación de $\widehat{\mathbb{C}}$

$$w = I_C(z) = -\frac{\overline{b}\overline{z} + c}{b}$$

□

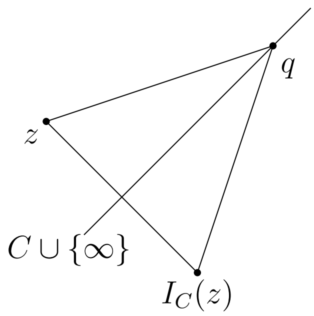
Afirmación 2.25. *Si $a = 0$, entonces I_C es una reflexión de $\mathbb{C}$ respecto a $C \setminus \{\infty\}$.*

Demostración. La prueba la haremos por casos:

- Sea $z \in \mathbb{C}$, es un punto fijo de I_C sí y sólo sí $z = \frac{(-\overline{b}\overline{z} - c)}{b}$, es decir $z \in C$
- Sí $z \in \mathbb{C} \setminus C$ y $q \in C \setminus \{\infty\}$, entonces:

$$\begin{aligned} |I_C(z) - q| &= |I_C(z) - I_C(q)| \\ &= \left| -\frac{\overline{b}\overline{z} + c}{b} - \frac{\overline{b}\overline{q} + c}{b} \right| \\ &= \left| \frac{\overline{b}}{b}(\overline{q} - \overline{z}) \right| \\ &= |z - q| \end{aligned}$$

Entonces, z e $I_C(z)$ son equidistantes de cualquier punto $q \in C \setminus \{\infty\}$, así que $I_C(z)$ debe ser z o su reflejo respecto $C \setminus \{\infty\}$. Como $z \notin C$, $I_C(z) \neq z$, así que I_C representa conjugaciones complejas. □



En resumen, la transformación 2.8 representa inversión en C sí C es un círculo en $\mathbb{C}$, y una reflexión en $C \setminus \{\infty\}$ sí $C \setminus \{\infty\}$ es una línea en $\mathbb{C}$. Por teorema 2.11 sabemos que transformaciones de Möbius manda círculos en círculos, ahora tenemos:

Lema 2.26. *Sean C y C' círculos de $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces $I_{C'} = mI_Cm^{-1}$*

Demostración. Sí $z \in C'$, entonces $I_{C'}(z) = z$ además $I_Cm^{-1}(z) = m^{-1}(z)$ ya que $m^{-1}(z) \in C$. Definamos $T = mI_{C'}m^{-1}I_{C'}$, entonces

$$T(z) = mI_Cm^{-1}I_{C'}(z) = mI_Cm^{-1}(z) = mm^{-1}(z) = z$$

para toda $z \in C'$, por tanto T fija a C como la composición de transformaciones de Möbius, así $T \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$. Como T fija C', T fija al menos tres punto de $\widehat{\mathbb{C}}$, por corolario 2.15, entonces T es la identidad, por tanto

$$mI_Cm^{-1} = I_{C'}^{-1} = I_{C'}.$$

$\square$

Por tanto, los elementos $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ manda pares de conjugados con respecto a C a sus pares de conjugados con respecto a $C' = m(C)$.

Teorema 2.27. *Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, sean C y $C' = m(C)$ círculos en $\widehat{\mathbb{C}}$. Sí $w = I_C(z)$ entonces $m(z) = I_{C'}(m(z))$.*

Demostración. Si $w = I_C(z)$ entonces

$$I_{C'}(m(z)) = mI_Cm^{-1}m(z) = mI_C(z) = m(w).$$

$\square$

2.3. Clases de conjugación en $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$.

Definición 2.28. Sea G un grupo y sean $g, h \in G$, diremos que g es el conjugado de h, denotado por $g \sim h$, sí existe $a \in G$ tal que $g = aha^{-1}$

Afirmación 2.29. *La conjugación es una relación de equivalencia.*

Demostración. 1. $\sim$ es reflexiva, es decir, $g \sim g$.
Sea $g \in G$, pero $g = 1g1^{-1} = 1g1$, por tanto $\sim$ es reflexiva.

2. $\sim$ es simétrica. Sean $g, h \in G$ tal que $g \sim h$, es decir, existe $f \in G$ tal que $g = fhf^{-1}$ pero esto equivale a $f^{-1}gf = h$, donde $f = (f^{-1})^{-1}$ así que $h \sim g$.

3. $\sim$ es transitiva, sean $g, h, f \in G$ tales que $g \sim h$ y $h \sim f$, es decir, existen $r, s \in G$ tales que $g = rhr^{-1}$ y $h = sfs^{-1}$. Entonces

$$g = rhr^{-1} = r(sfs^{-1})r^{-1} = (rs)f(rs)^{-1}$$

sea $a = rs$ entonces $a \in G$, así que $g \sim f$

Por tanto $\sim$ es una relación de equivalencia. □

Las clases de equivalencia de la conjugación son llamadas clases de conjugación.

Definición 2.30. Diremos que z es un punto fijo de $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ sí $m(z) = z$.

Notemos que $f(z)$ es un punto fijo de la transformación conjugada de m donde $fmf^{-1} \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$.
En esta sección consideraremos los puntos fijos y las clases de conjugación de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ donde cada elemento esta normalizado.

Teorema 2.31. *Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ normalizada. Entonces*

- *Sí $(a + d)^2 \neq 4$, entonces m fija dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$.*
- *Sí $(a + d)^2 = 4$ y $m \neq Id$, entonces m tiene un punto fijo en $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ normalizada, entonces $m(\infty) = \frac{a}{c}$, diremos que m fija al ∞ sí y sólo sí $c = 0$. Por otro lado, sí $c \neq 0$, entonces $z \in \mathbb{C}$ es un punto fijo de m, lo cual equivale a que la siguiente ecuación

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

tiene dos raíces, así que m fija dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$, a no ser que $(d-a)^2+4bc=0$ en cuyo caso la ecuación tiene una doble raíz y m tendría un punto fijo. Usando que $ad-bc=1$, tenemos $(a-d)^2-4=0$. En resumen m tiene un punto fijo sí y sólo sí $(a+d)^2=4$.
Regresando al caso $c=0$ y m fija al ∞, tenemos que $ad=1$ y $m(z)=a^2z+ab$, así tendremos el segundo punto fijo $z=\frac{ab}{(1-a^2)}$ sí y sólo sí $a^2\neq 1$ (ó equivalentemente $(a-d)^2\neq 4$). Cuando $a^2=1$ tenemos $m(z)=z\pm b$, así que m es la identidad para $b=0$ y m tiene un punto fijo, es decir ∞, sí $b\neq 0$. $\square$

Consideraremos la función $(a+d)^2$, importante para determinar las clases de conjugación en $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$.

Definición 2.32. Sea

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{C})$$

la traza de A, denotada por $tr(A)$, se define por $tr(A)=a+d$

Notemos que $tr(AB)=tr(BA)$ ya que las entradas de las matrices 2×2 son complejos así que podemos conmutar las entradas; además sí B es invertible, entonces:

$$tr(BAB^{-1})=tr(B^{-1}BA)=tr(A)$$

Así que la $tr(A)$ depende sólo de la clase de conjugación de un elemento $A\in GL(2,\mathbb{C})$. Cada transformación de Möbius m es representada por un par de matrices $\pm A$ en $SL(2,\mathbb{C})$, tenemos que $tr(-A)=-tr(A)$, así que $tr^2(m)=(tr(A))^2=(a+d)^2$ es una función bien definida de m que depende sólo de las clases de conjugación de $m\in PSL(2,\mathbb{C})$.

Ejemplo 2.33. Sea $T\in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, representada por la matriz en $A\in SL(2,\mathbb{C})$:

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$$

describiremos sus clases de conjugación en $PSL(2,\mathbb{C})$.
Notemos que

$$tr^2(T)=(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}})=\lambda+\lambda^{-1}+2$$

Como mencionamos antes la identidad es un elemento conjugado, así que la identidad es una clase de conjugación. Cada clase de conjugación de

$PSL(2,\mathbb{C})$ son escritas por una selección de representantes de cada clase.
Sí $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, definimos:

$$T_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z & \text{sí} \quad \lambda \neq 1 \\ z+1 & \text{sí} \quad \lambda = 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

Teorema 2.34. *Sea $m \in Möb^+(\widehat{\mathbb{C}})$ con $m \neq Id$, entonces existe alguna $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $m \sim T_\lambda$ de 2.9.*

Demostración. Primero supongamos que $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tiene sólo un punto fijo z_0. Por teorema 2.13 existe $f \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $f(z_0) = \infty$. Entonces fmf^{-1} sólo fija a ∞, así que $fmf^{-1}(z) = z + t$ para alguna $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, esto es, $fmf^{-1} = m_t$ donde m_t es una traslación.
Sea $g = \frac{z}{t}$, entonces $gm_tg^{-1}(z) = z + 1$, así que

$$(gf)m(gf)^{-1} = T_1$$

entonces, $m \sim T_1$.
Ahora supongamos que m tiene dos puntos fijos, digamos z_1, z_2. Por teorema 2.13, existe $h \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $h(z_1) = 0$ y $h(z_2) = \infty$. Entonces hmh^{-1} fija 0 y ∞, así que es fácil ver que $hmh^{-1} = T_\lambda$ con T_λ de 2.9 para algún $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, es decir, $m \sim T_\lambda$ □

Para describir completamente las clases de conjugación, nosotros tenemos que determinar T_κ y T_λ.

Teorema 2.35. *Sí $U_\kappa \sim T_\lambda$ sí y sólo sí $\kappa = \lambda$ o $\kappa = \lambda^{-1}$.*

Demostración. Sea T_1, el caso particular de 2.9 con $\lambda = 1$, como T_1 fija ∞, fT_1f^{-1} fija a $f(\infty)$ para cada $f \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, entonces T_1 no puede ser el conjugado de cualquier U_λ con $\lambda \neq 1$, ya que sus elementos fijan al 0 y al ∞.
Ahora supongamos que U_κ y T_λ son conjugados, donde $\lambda, \kappa \neq 1$. Entonces $tr^2(U_\kappa) = tr^2(T_\lambda)$ esto implica que

$$\kappa + \frac{1}{\kappa} + 2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$$

tomando $\kappa = \lambda$ o $\kappa = \frac{1}{\lambda}$. Para la otra implicación, U_κ es el conjugado de $T_{\frac{1}{\kappa}}$ sí $J(z) = \frac{1}{z}$ entonces $JU_\kappa J^{-1} = U_{\frac{1}{\kappa}}$ □

Corolario 2.36. *Sean $m_1, m_2 \in Möb^+(\widehat{\mathbb{C}}) \setminus \{Id\}$, $m_1 \sim m_2$ sí y sólo sí $tr^2(m_1) = tr^2(m_2)$.*

Demostración. Sólo basta probar que $tr^2(m_1) = tr^2(m_2)$ implica que m_1 y m_2 son conjugados. Así que supongamos que m_1 y m_2 son conjugados de U_κ y T_λ respectivamente, entonces $tr^2(m_1) = tr^2(m_2)$ implica que $tr^2(U_\kappa) = tr^2(T_\lambda)$, así que $\kappa = \lambda$ o $\kappa\lambda = 1$, implica que U_κ y T_λ son conjugados, por tanto m_1 y m_2 son conjugados. □

2.4. Clasificación geométrica de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$.

Ahora consideraremos la geometría de una transformación de Möbius distinta de Id. Como ya mencionamos antes m no es determinada de manera única por λ, ya que m también es un conjugado de $U_{1/\lambda}$.

Definición 2.37. Diremos que $\{\lambda, 1/\lambda\}$ es el múltiplo de m sí determina de manera única a m.

Diremos que dos trasformaciones de Möbius son conjugadas sí y sólo sí tienen el mismo múltiplo, el cual sería justamente la función tr^2. Se relación estos dos invariantes de la siguiente manera:

$$tr^2(m) = tr^2(T_\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$$

así que λ y $1/\lambda$ son raíces de la ecuación cuadrática: $z^2+(2-tr^2(m))z+1 = 0$. Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tenemos los siguientes casos:

1. Diremos que es una transformación parabólica si m tiene un punto fijo $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ sí y sólo sí $\lambda = 1$.
2. Por otro lado, si tiene dos puntos fijos, con $|\lambda| \neq 1$ y mueve todos los puntos distintos de los fijos; se despliegan dos casos:
   a) m es hiperbólica sí λ es real y positiva.
   b) m es loxodrómica en cualquier otro caso del anterior.
3. Sí $|\lambda| = 1$ y tiene dos puntos fijos, m es elíptica.

Ahora, sí m es un conjugado de T_λ sí y sólo sí $tr^2(m) = tr^2(T_\lambda)$, entonces tenemos $tr^2(T_\lambda) = \lambda + \lambda^{-1} + 2$, así que:

1. m es elíptica sí y sólo sí $0 \leq tr^2(m) < 4$.
2. m es parabólica sí y sólo sí $tr^2(m) = 4$.
3. m es hiperbólica sí y sólo sí $tr^2(m) > 4$.
4. m es loxodrómica sí y sólo sí $tr^2(m) < 0$ ó $tr^2(m) \notin \mathbb{R}$.

La diferencia entre la transformación hiperbólica y la loxodrómica diferentes de la identidad, es que las hiperbólicas dejan al disco invariante y las transformaciones loxodrómicas no. Cabe notar que las transformaciones elípticas y parabólicas dejan al disco invariante.

Definición 2.38. El orden de una transformación de Möbius es el menor entero positivo n tal que $m^n = Id$

En otro caso diremos que m tiene orden infinito.

Teorema 2.39. *Sea $m \in Möb^+(\widehat{\mathbb{C}})$, $m \neq Id$ con orden finito, entonces m es elíptica.*

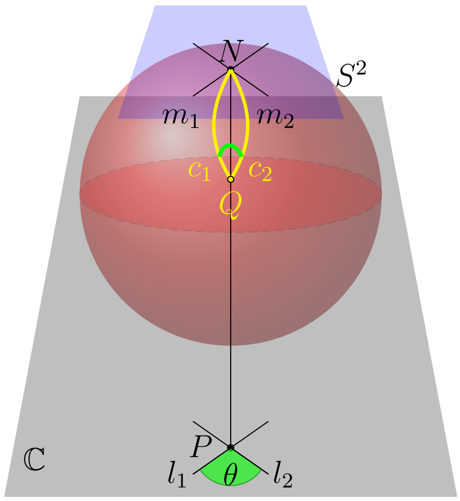
Demostración. Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ con $m \neq Id$ de orden finito, es decir, $m^n = Id$. Sea m el conjugado para algún T_λ, así que m^n es el conjugado de T_λ^n para cada entero n, entonces T_λ es de orden finito. Ahora $T_1^n(z) = z + n$, así que T_1 tiene periodo infinito, entonces $\lambda \neq 1$. Con lo cual $T_\lambda^n(z) = \lambda^n z$, propongamos $T_\lambda^s = Id$ donde s es el orden finito de m, entonces también lo es para T_λ, esto que implica $\lambda^s = 1$ y por tanto $\mid \lambda \mid$. Entonces m es elíptica. $\square$

Notemos que no toda transformación elíptica tiene orden finito, para esto consideremos $\lambda = e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$, así que T_λ es elíptica sí y sólo sí θ no tiene un múltiplo entero de 2π, es decir, T_λ tiene periodo finito sí y sólo sí θ es un múltiplo racional de 2π, así que sí θ es un múltiplo irracional de 2π entonces T_λ es una transformación elíptica de orden infinito.

2.5. Conformidad.

Definición 2.40. Sea S_1 y S_2 superficies, diremos que $f : S_1 \to S_2$ es una aplicación conforme sí preserva ángulos.

Que preserve ángulos significa que dadas las curvas c_1, y c_2 sobre S_1 que se intersectan en el punto Q con un ángulo θ entonces $f(c_1)$ y $f(c_2)$ se intersectan en $f(Q)$ con el mismo ángulo θ, cabe notar que el ángulo entre las dos curvas está definido por sus rectas tangentes.



Definición 2.41. Diremos que una aplicación f es una isometría sí preserva distancias entre cada par de puntos.

Por ejemplo las rotaciones y reflexiones euclidianas en el espacio $\mathbb{R}^n$ son isometrías, ya que los ángulos en $\mathbb{R}^n$ pueden ser expresados en términos de la distancia, es decir, isometrías de $\mathbb{R}^n$ inducidas por aplicaciones conformes entre superficies en $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.42. *La proyección estereográfica $\pi^{-1}\colon \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$ es conforme.*

Demostración. Sea un punto $P \in \mathbb{C}$, y sea l_1 y l_2 dos líneas rectas en $\mathbb{C}$ que se cortan en el punto P y el ángulo que forman es θ. Sí $\prod_j$ es el plano que pasa por N y l_j con $j = 1, 2$, entonces $S^2 \cap \prod_j$ es un círculo C_j en S^2; para cada punto V en l_j, entonces la línea NV intersecta S^2 en $\pi^{-1}(V) \in S^2 \cap \prod_j$, así que C_j es la proyección $\pi^{-1}(l_j \cup \{\infty\})$ de el círculo $l_j \cup \{\infty\}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$; en particular, C_1 y C_2 se intersectan en N y $Q = \pi^{-1}(P)$. El plano tangente T de S^2 en N es paralelo a la ecuación del plano $\mathbb{C}$, así que las líneas $m_j = T \cap \prod_j$ pasan por N y son paralelas a las líneas $l_j = \mathbb{C} \cap \prod_j$ y las rectas m_j forman un ángulo θ. Además los círculos C_j se intersectan con N y Q, ya que C_1 y C_2 son aplicaciones en sí mismos por medio reflexiones en el plano perpendicularmente bisectando el segmento NQ. Como m_j es el plano tangente a C_j en N, el ángulo debe ser θ, así que $\pi^{-1}(l_1)$ y $\pi^{-1}(l_2)$ se intersectan con un ángulo θ en $Q = \pi^{-1}(P)$. $\square$

Corolario 2.43. *La proyección estereográfica $\pi\colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ es conforme.*

Demostración. Sean c_2, c_2 curvas sobre S^2 que se intersectan en $Q \neq N$ con un ángulo θ, tomamos sus dos planos tangentes t_j en Q donde $j = 1, 2$. Sean $\prod_j$ es el plano que pasa por N y t_j, así que $S^2 \cap \prod_j$ es un círculo C_j en S^2 que pasa por N y Q y $\mathbb{C} \cap \prod_j$ es una línea l_j en $\mathbb{C}$ que pasa por $P = \pi(Q)$. Ahora sean C_1 y C_2 hacen un ángulo θ en Q esto por sus planos tangentes t_j, de manera análoga a la prueba del teorema 2.42, mostramos que l_1 y l_2 hacen un ángulo θ en P. Como l_j es tangente a $\pi(C_j)$ en P, se prueba que π es conforme. $\square$

El ángulo en ∞ entre las curvas c_1 y c_2 de $\mathbb{C}$ se define como el ángulo en N entre las curvas $\pi^{-1}(c_1)$ y $\pi^{-1}(c_2)$, con lo cual se muestra que este ángulo existe, ya que la proyección estereográfica $\pi : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ y $\pi^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \to S^2$ son aplicaciones conformes. Como $J(z) = \frac{1}{z}$ induce una rotación $\pi^{-1}J\pi$ de S^2 envía un ángulo θ en N al ángulo θ en S^2, el ángulo entre c_1 y c_2 en ∞ es igual al ángulo entre $J(c_1)$ y $J(c_2)$ en 0.

Definición 2.44. Sea $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una aplicación conforme en ∞ sí y sólo sí fJ es conforme en 0.

Definición 2.45. Sea f una aplicación conforme de una superficie orientada en sí misma diremos que es conforme directamente (o indirectamente) sí preserva (o invierte) la orientación.

Definición 2.46. Sea f una aplicación conforme de una superficie orientada en sí misma diremos que es conforme directamente (o indirectamente) sí preserva (o invierte) la orientación.

Por ejemplo las rotaciones y reflexiones de S^2 son conformes directamente e indirectamente respectivamente. Dado que $\pi : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ y $\pi^{-1}\colon \widehat{\mathbb{C}} \to S^2$ son conformes, diremos que $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es conforme directamente e indirectamente sí y sólo sí se induce la aplicación $\pi^{-1}f\pi\colon S^2 \to S^2$, conforme directamente e indirectamente a continuación se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
S^2 \arrow[r, "\pi^{-1}f\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & S^2 \arrow[d, "\pi"] \\
\widehat{\mathbb{C}} \arrow[r, "f"'] & \widehat{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

Mostraremos resultados sobre automorfismos de $\mathbb{C}$, para lo cual necesitamos el siguiente resultado:

Teorema 2.47. *[2, Teo. A.12] Sea $R \subseteq \mathbb{C}$ una región con $f\colon R \to f(R) \subseteq \mathbb{C}$ diremos que f es conforme directamente sí y sólo sí f es analítica en R y $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in R$.*

Teorema 2.48. *Cualquier elemento $f \in Aut(\widehat{\mathbb{C}})$ es un homeomorfismo conforme directamente de $\widehat{\mathbb{C}}$ en sí mismo.*

Demostración. Por corolario 2.4 y por 2.2, $m \in Aut(\widehat{\mathbb{C}})$ es un homeomorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$ a sí mísmo. Sea m bajo las condiciones de 2.1. Su derivada es

$$m'(z) = \frac{-(az+b)c + (cz+d)a}{(cz+d)^2} = \frac{-acz - bc + caz + da}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

Entonces $m'(z) \neq 0, \infty$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ y por teorema 2.47, m es conforme directamente de z. Tenemos los siguientes casos:

1. $z = \infty$ y $m(z) \neq \infty$.

2. $z = \infty$ y $m(z) = \infty$.

3. $z = -d/c \neq \infty$ y $m(z) = \infty$.

De 1. tenemos $c \neq 0$, la transformación

$$U(z) = mJ(z) = \frac{a + bz}{c + dz}$$

satisface $U'(0) = \frac{-1}{c^2} \neq 0, \infty$, así que U es conforme directamente en 0, entonces m es conforme directamente en ∞.
En 2., tenemos $c = 0$ entonces $a \neq 0$. La transformación

$$V(z) = JmJ(z) = \frac{c + dz}{a + bz}$$

satisface $V'(0) = \frac{1}{a^2} \neq 0, \infty$, así que V es conforme directamente en 0, también m es directamente conforme en ∞.
En 3., tenemos $c \neq 0$, la transformación

$$W(z) = Jm(z) = \frac{cz + d}{az + b}$$

satisface $W'(-d/c) = -c^2 \neq 0, \infty$. Por tanto W es conforme directamente en $-d/c$, y también m lo es.
En resumen, m es conforme directamente en $\widehat{\mathbb{C}}$. □

El siguiente teorema es un poco más fuerte que el anterior:

Teorema 2.49. *Cualquier aplicación conforme directamente $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es un automorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una aplicación conforme directamente y supongamos que $f(\infty) = \infty$, por la composición de f con un automorfismo adecuado. Sólo basta probar que f es meromorfa en cada punto $a \in \widehat{\mathbb{C}}$.

1. Sea $a \in \mathbb{C}$ y $f(a) \in \mathbb{C}$, como f es conforme directamente en a entonces $f'(a) \neq 0, \infty$ por teorema 2.47, así que f es analítica en a y a es un punto simple para f.

2. Sea $a \in \mathbb{C}$ y $f(a) = \infty$, dado que la rotación J es conforme directamente, Jf es conforme directamente, y como $(Jf)(a) = 0$, por teorema 2.47 se muestra que $J\ f$ es analítica con un cero simple en a, así que f es meromorfa con un polo simple en a.

3. Como $f(\infty) = \infty$, tenemos que $(JfJ)(0) = 0$, y de manera análoga f es meromorfa con un polo simple en ∞.

Entonces f es meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$, así que f' también lo es,y por teorema 1.23 f' es racional. De 1., $f'(a) \neq 0$, mientras que de 2. f' tiene un polo en a, así que $f'(a) = \infty \neq 0$. Pero en el 3.

$$f(z) = a_1 z + a_0 + a_{-1} z_{-1} + \dots$$

para z grande, con $a_1 \neq 0$, así

$$f'(z) = a_1 - a_{-1} z^{-2} - \dots$$

para z grande, entonces $f'(\infty) = a_1 \neq 0$. Por tanto f' es una función racional la cual no toma valores en 0, así que f' no es un constante, por teorema 1.24 f' no es constante entonces f es un polinomio de grado 1 por el teorema 1.25, entonces por teorema 1.26 $f \in Aut(\widehat{\mathbb{C}})$. □

3. Grupos discontinuos.

Definición 3.1. Sea (X, τ) un espacio topológico y $(G, \cdot)$, diremos que G actúa en el espacio topológico X sí hay una función continua

$$\phi : G \times X \to X$$

tal que:

1. Sea e la identidad en G y cualquier $x \in X$, $e(x) = x$.
2. Para todo $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$ $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x))$.

Para las siguientes definiciones consideraremos (X, τ) un espacio topológico y $(G, \cdot)$ un grupo de homeomorfismos de X en sí mismo.

Definición 3.2. Diremos que la acción de G en un punto $x \in X$ es libre y discontinua sí existe una vecindad U de x, tal que $g(U) \cap U = \emptyset$, para todo $g \in G$.

Definición 3.3. El conjunto de puntos donde la acción de G es libre y discontinua se llama región de discontinuidad y se denota por $\Omega = \Omega(G)$.

Definición 3.4. Sea $Y \subseteq X$ es G-invariante o invariante bajo G, sí $g(Y) = Y$ para toda $g \in G$.

El conjunto Ω es G-invariante y un subconjunto abierto de X, entonces cualquier punto de U pertenece a Ω.

Definición 3.5. Diremos que x y y son G-equivalentes o equivalentes bajo G, sí existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$.

Definición 3.6. Diremos que el grupo G actúa sobre Y, si G particiona a Y n clase de equivalencia.

El espacio de clases de equivalencia lo denotaremos por Y/G, de forma análoga como en topología, para definir Y/G necesitamos la proyección natural $\rho\colon Y \to Y/G$.

Definición 3.7. Diremos que $G \subseteq \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ es un grupo kleiniano sí actúa libre y discontinuamente en algún punto $z \in \mathbb{C}$.

Salvo que se especifique lo contrario, todos los grupos kleinianos son subgrupos de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, y todas las acciones son acciones sobre $\widehat{\mathbb{C}}$.
En general, $\widehat{\mathbb{C}}/G$ es un espacio feo, pero Ω/G es agradable, ya que es un espacio de Hausdorff,

Proposición 3.8. *Ω/G es un espacio Hausdorff.*

Proposición 3.9. *Sea G un subgrupo no discreto de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$. Entonces hay una sucesión de elementos distintos de G convergen a la identidad.*

Proposición 3.10. *Sea G un grupo kleiniano, entonces G es un subgrupo discreto de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$.*

Las demostraciones de 3.8, 3.9, 3.10 se pueden ver en [4, Proposición C.2, C.3].

Referencias

[1] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley, 1974.

[2] Gareth A. Jones and David Singerman. *Complex functions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987. An algebraic and geometric viewpoint.

[3] Jerrold E. Marsden and Michael J. Hoffman. *Basic complex analysis.* W. H. Freeman and Company, New York, second edition, 1987.

[4] Bernard Maskit. *Kleinian groups*, volume 287 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[5] James R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[6] Joseph J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.