

Un cálculo combinatorio del Polinomio de
Alexander

Joselyn Soto Contreras
Asesorada por Dra. Fabiola Manjarrez Gutierrez

Julio 2017

Agradezco al Instituto de Matemáticas unidad Cuernavaca por haberme dado la oportunidad de conocer más a fondo las distintas áreas de las Matemáticas y en permitirme trabajar con la Dra Fabiola Manjarrez, a quien también le agradezco por la paciencia y el tiempo que me dedicó, los cuales hicieron posible este trabajo. Así como agradezco al Programa para un Avance Global e Integrado de la Matemática Mexicana, proyecto FORDECYT clave 265667

Introducción

En el siguiente trabajo introduciremos algunos conceptos básicos de topología como homeomorfismos, espacios cocientes y triangulación de superficies, con el fin de llegar a superficies muy particulares a las que podemos aplicar, con un poco de imaginación, un proceso similar a la triangulación para modificarlas, los nudos.

Hablaremos de su problemática principal, la clasificación de nudos; cuándo dos nudos son equivalentes y cuándo son definitivamente distintos es el trabajo principal de la teoría de nudos y haremos uso de sus invariantes, un concepto que intrduciremos más adelante, para observar distinguir algunos. En particular intrduciremos el primer invariante algebraico, el Polinomio de Alexander, pues si bien hoy en día no es el más efectivo de los existentes, fue el primer enlace entre el álgebra y la teoría de nudos. Además demostraremos que es en efecto invariante y lo calcularemos para algunos nudos distintos, para esto elegimos un acercamiento combinatorio, pues también lo podemos calcular algebraica o geoméricamente pero nos resulta menos directo.

1 Homeomorfismos

Introduciremos la principal noción de equivalencia de la topología, un concepto que nos da a conocer si podemos deformar un objeto en otro preservando su estructura base y la cercanía entre puntos por medio de una función.

Definición 1.1. Sean X y Y espacios con métrica Euclidiana. Un Homeomorfismo es una función biyectiva $h: X \rightarrow Y$ tal que h y h^{-1} son continuas.

Diremos que dos espacios son homeomorfos o topológicamente equivalentes si y sólo si existe un homeomorfismo entre ellos. Veamos algunos ejemplos de objetos homeomorfos

Ejemplo 1.1. Muestre que una esfera en \mathbb{R}^3 con un punto removido es homeomorfa al plano.

Por medio de rotaciones y escalas podemos transformar cualquier esfera con un punto removido en la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ con el punto $(0,0,1)$ removido. Nuestro homeomorfismo será dado por medio de un rayo que salga del punto removido, atravesase a la esfera en un punto (x,y,z) e intersekte al plano en $h(x,y,z)$. Este mapeo es la proyección estereográfica. Comprobemos que h es biyectiva, continua y tal que h^{-1} también lo sea, para esto será suficiente obtener las fórmulas correspondientes a ambas. Sea r la distancia del origen a $h(x,y,z)$, de acuerdo a los triángulos similares de la Figura tenemos que

$$\frac{r}{1} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1-z}$$

Ahora bien, como $h(x,y,z)$ es un vector múltiplo de $(x,y,0)$ podemos concluir que

$$h(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right)$$

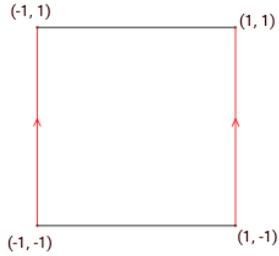
Y propondremos como su inversa

$$h^{-1}(u, v, z) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right)$$

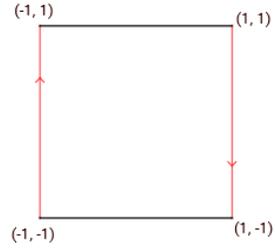
Así $S^2 - N \approx \mathbb{R}^2$ donde N es el "polo norte" de la esfera. Análogamente se puede probar que $S^n - N \approx \mathbb{R}^n$. Una consecuencia es que $S^n \approx \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Veremos las equivalencias que se producen al identificar partes de la frontera de un rectángulo con diferentes orientaciones.

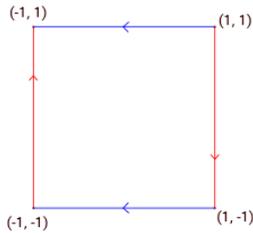
Ejemplo 1.2. Sea un rectángulo de lado dos centrado en el origen, escriba explícitamente las relaciones de equivalencia al identificar sus lados para formar un cilindro, la banda de Möbius, la botella de Klein y el espacio real proyectivo:



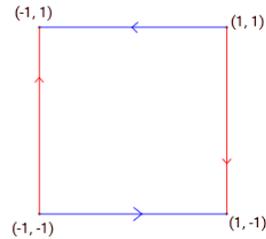
(a) Cilindro
 $\{(-1, y) \sim (1, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$



(b) Banda de Möbius
 $\{(-1, -y) \sim (1, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$



(c) Botella de Klein
 $\{(-1, -y) \sim (1, y), (x, -1) \sim (x, 1) \mid -1 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$



(d) Espacio real proyectivo
 $\{(-1, -y) \sim (1, y), (-x, -1) \sim (x, 1) \mid -1 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$

Además es posible encontrar equivalencias entre estos objetos

Ejemplo 1.3. Muestre que la botella de Klein es equivalente a dos bandas de Möbius unidas por su frontera

Empezaremos por remover una banda de Möbius de la parte de en medio de la botella de Klein, observamos que del corte nos resultan dos bandas tales que al trasladarlas y pegarlas por la dirección adecuada obtenemos otra banda de Möbius cuya frontera coincide con frontera de la banda que cortamos al principio.

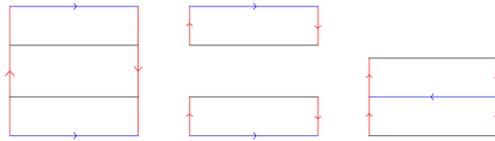
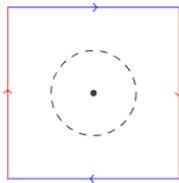


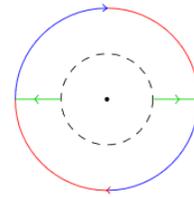
Figure 2: Sucesión de cortes y traslaciones a la botella de Klein

Un ejemplo similar es el siguiente

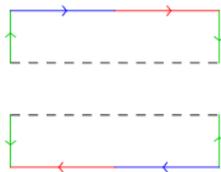
Ejemplo 1.4. Muestre la equivalencia entre el espacio real proyectivo y una banda de Möbius unida por su frontera con la frontera de un disco en \mathbb{R}^2 .



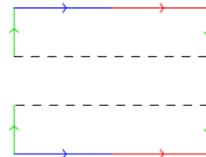
(a) El espacio real proyectivo con un disco en el centro



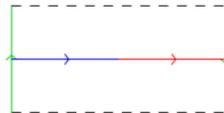
(b) El espacio real proyectivo transformado a un disco equivalente, con un disco en su centro



(c) Dos bandas resultantes del espacio real proyectivo menos el disco



(d) Una banda girada para después seguir una traslación



(e) La banda de Möbius con frontera que coincide con la frontera del disco removido

2 Isotopías

Definición 2.1. Sean A y B subconjuntos de X . Una isotopía de ambiente de A a B es una función continua $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ que satisface las siguientes tres condiciones. Llamaremos h_t a $h(x, t)$.

- $h_t : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo para cada $t \in [0, 1]$.
- h_0 es la función identidad.
- $h_1(A) = B$

Ejemplo 2.1. Muestre que existe una isotopía de ambiente en \mathbb{R}^2 que deforma cualquier cuadrilátero en cualquier triángulo.

Observemos cómo podemos deformar dos lados del cuadrilátero hasta perder el cuarto vértice y así llegar a un triángulo.

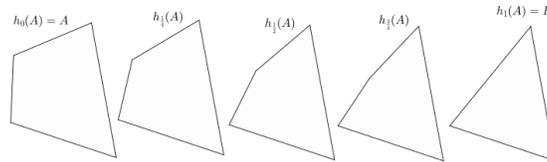
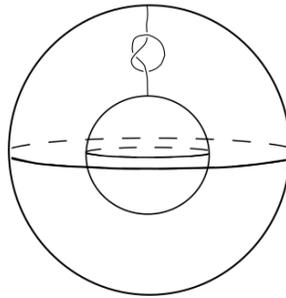
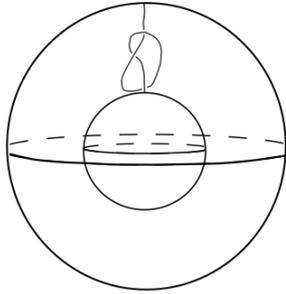


Figure 4: Una isotopía de ambiente en \mathbb{R}^2 de un cuadrilátero a un triángulo

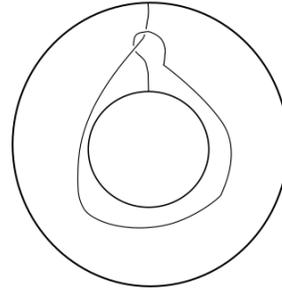
Ejemplo 2.2. La figura siguiente nos muestra un arco anudado en la región contenida entre dos esferas concéntricas. Encuentre una isotopía tal que el arco sea un segmento de recta entre ambas, sin mover los vértices de éste.



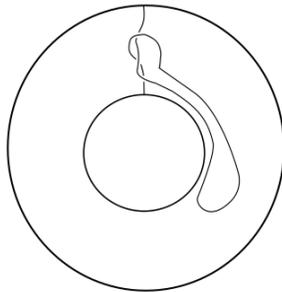
Ilustraremos el procedimiento que se seguirá para "desanudar" el arco por medio de una sucesión de isotopías



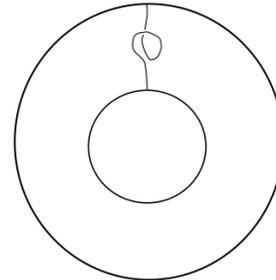
(a) Estiramos la parte de atrás del arco



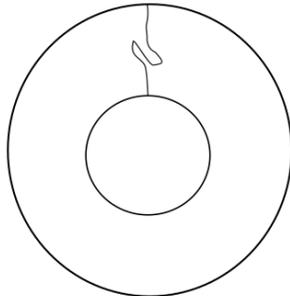
(b) Una parte del arco pasa detás de la esfera pequeña hasta llegar abajo de ella



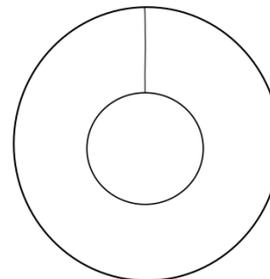
(c) Una parte del arco se mueve por arriba de la esfera pequeña hasta llegar el otro lado



(d) Se reduce el arco



(e) Una parte del arco pasa por arriba de otra parte del arco



(f) Se reduce la curva a una recta

Definición 2.2. Sea un disco con frontera poligonal en el plano. Llamaremos una triangulación del disco a una subdivisión finita del disco en regiones triangulares tales que la intersección entre cualquier par de triángulos sea el vacío, o un vértice de dos triángulos, o bien, una arista de dos triángulos.

Lema 2.1. Sea D un disco triangulado en el plano. Es posible, por medio de isotopías, remover los triángulos de D uno a uno hasta quedarnos con sólo

un triángulo al final y de forma que en cada etapa D sea un disco. A este procedimiento le llamaremos *Shelling*.

Demostración.

Es notable que los triángulos que tendríamos permitido isotopar son aquellos que tengan por lo menos una arista que concida con la frontera de D . Tendremos entonces tres posibles casos

- Triángulos tales que sólo una arista coincida con la frontera de D .
- Triángulos tales que dos aristas coincidan con la frontera de D .
- Triángulos tales que sólo una arista y el vértice opuesto a esta coincidan con la frontera de D .

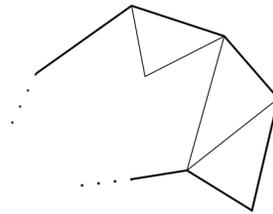
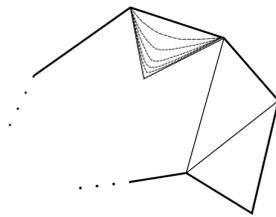
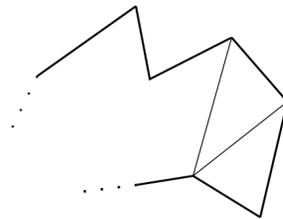


Figure 6: Fragmento de polígono con las tres posibilidades de triángulos removibles.

Observemos lo que sucede al remover el primer caso de triángulos.



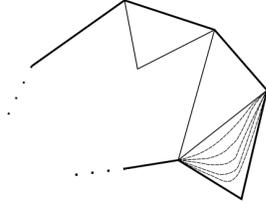
(a) Isotopías que llevan dos aristas a una



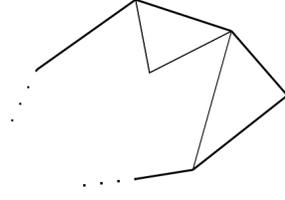
(b) Polígono después de remover el triángulo

D se mantiene como disco poligonal, entonces no habrá problema con remover los triángulos de la misma forma.

Observemos ahora los que sucedería al remover un triángulo de la segunda forma

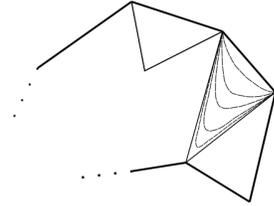


(a) Isotopías que lleva una arista hacia dos

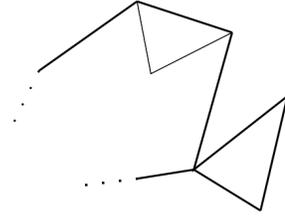


(b) Polígono después de remover el triángulo

De nuevo D se mantiene como disco poligonal, entonces no habrá problema con remover los triángulos de la misma forma.



(a) Isotopías que remueven el triángulo



(b) Polígono después de remover el triángulo

En este caso D se transforma en dos polígonos pegados por un vértice, lo cual no es un disco. Así que este movimiento no lo permitiremos.

Veamos ahora, por medio de una inducción sobre el número de triángulos que conforman D , y usando solamente las isotopías primera y segunda, podemos isotopar cualquier disco triangulado a un sólo triángulo. Sea k el número de triángulos contenidos en D . Si tenemos un disco dividido en dos triángulos su intersección es necesariamente de sólo una arista, es decir ambos son el primer caso y podemos remover uno.

Supongamos que si un disco está dividido en al menos dos regiones triangulares y menos de k , entonces se cumple el lema.

Ahora veamos lo que sucede en un disco dividido en k regiones.

Tomemos un triángulo del tercer caso, ya que ahí se encuentra nuestro problema, y llamémosle T . Hemos visto ya que los vértices de T dividirán al disco en otros dos discos, llamémosles D' y D'' . Notemos ahora que T debe compartir dos aristas con otros triángulos, llamémoslos a' y a'' , o no estaríamos en el tercer caso. A su vez, a' y a'' deben intersectar en una arista a otro triángulo además de T (de no ser así, serían removibles y por tanto T también). Entonces D' y D'' tendrán al menos dos triángulos y menos de k , así que por nuestra hipótesis de inducción podemos isotoparlos a un triángulo y elegir que éstos triángulos sean los adyacentes a las aristas de a' y a'' , que como mencionamos antes podemos remover, para después remover a' o a'' y hacer que T sea removible también. ■

La noción que nos proporciona el procedimiento de Shelling nos ayudará a comprender los movimientos necesarios para definir la equivalencia de nudos. Claramente antes de esto será necesario definir formalmente a un nudo.

3 Nudos

Definición 3.1. *Un nudo K es una curva cerrada simple en \mathbb{R}^3 que se puede ver como un número finito de segmentos de recta e_1, e_2, \dots, e_n tales que la intersección de cualquier segmento e_k con otros segmentos es exactamente un vértice de e_k con un vértice de e_{k-1} y el otro vértice de e_k con un vértice de e_{k+1} (excepto cuando $k=n$ o cuando $k=1$).*

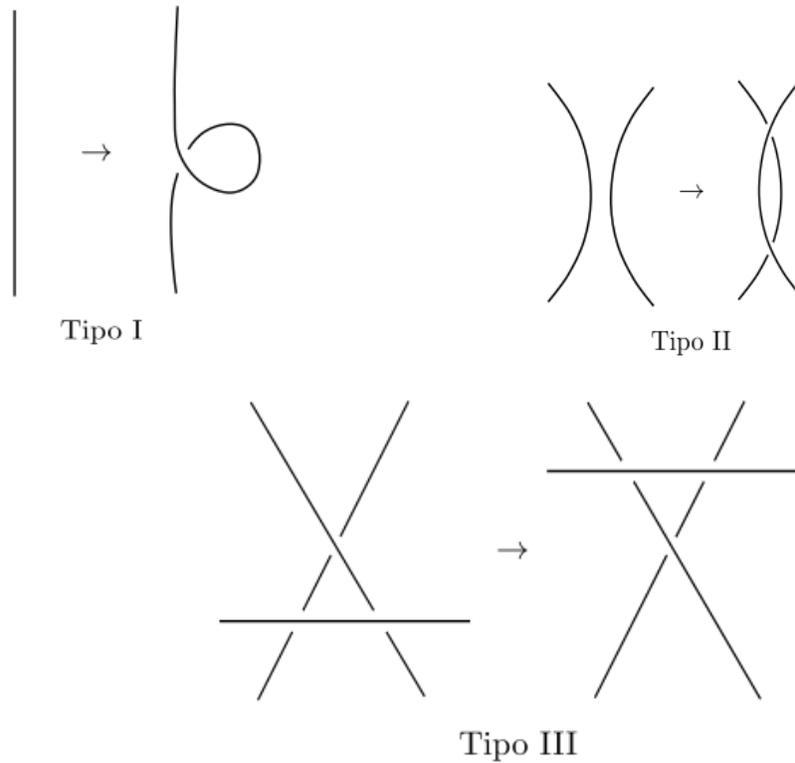
Definición 3.2. *Considere un triángulo ABC tal que la única intersección de éste con el nudo K sea el lado AC con un segmento e_k . Un movimiento triangular es reemplazar el lado AC del nudo K con los lados AB y BC del triángulo, para así crear un nuevo nudo L . O bien que el triángulo ABC interseque al nudo L en AB y BC y reemplazar éstos por el lado AC y crear al nudo K . Diremos que dos nudos son equivalentes si y sólo si existe una sucesión finita de movimientos triangulares que nos lleven de uno a otro.*

A veces resulta un poco difícil imaginar o dibujar los movimientos que hacemos al nudo, pues estamos trabajando con una curva en \mathbb{R}^3 . Así en su lugar trabajaremos con una proyección ortogonal del nudo hacia un plano. Dicha proyección debe cumplir con dos condiciones: que ningún vértice se proyecte a algún otro punto del nudo y que no haya tres puntos del nudo que se proyecten al mismo punto en el plano. De ser así le llamaremos un *diagrama de nudo* y tendremos el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Dados dos nudos K_1 y K_2 con diagramas D_1 y D_2 respectivamente. K_1 y K_2 son equivalentes si y sólo si D_1 y D_2 son equivalentes.*

Pese a que ya tenemos definida una noción de equivalencia, ésta puede resultar poco práctica, así que analizaremos propiedades de nudos que no cambian bajo movidas triangulares. Es decir, si dos nudos son equivalentes entonces tales propiedades permanecen iguales, les llamaremos *invariantes de nudos*. Los invariantes de nudos son muy poderosos pues nos permiten distinguir nudos distintos sin necesidad de encontrar toda la sucesión de movimientos triangulares.

Existen tres tipos de movimientos que nos resumen las alteraciones que podemos hacer para ir de un diagrama de un nudo a un diagrama de cualquier nudo equivalente. Estos tres movimientos son llamados los **movimientos de Reidemeister**



Tanto los inversos como imágenes espejo de cada movimiento serán también un movimiento de Reidemeister del mismo tipo. Habrá además un movimiento que sucede cuando reducimos el número de cruces del diagrama sólo volteando una parte de éste y se verá muy similar al de Tipo I de Reidemeister.

Dos invariantes de nudos muy comunes y fáciles de comprender son:

- Número de cruces del nudo. Este será el mínimo número de cruces que podemos encontrar en todos los diagramas equivalentes al nudo K .
- Nudo alternante o no alternante. Un nudo será alternante si y sólo si podemos encontrar un diagrama entre todos los diagramas equivalentes al nudo K tal que al viajar por el nudo pasemos por abajo y por arriba en cada cruce de manera alternada.

Pero el invariante que genera mayor interés y del que hablaré más adelante es el polinomio de Alexander.

Tenemos, además, el Resultado de Kauffman-Murasugi-Thistlethwaite [1] que necesita un diagrama alternante para conocer el número de cruces de una manera muy sencilla. Kauffman, Murasugi y Thistlethwaite nos dicen que si tenemos

un diagrama alternante de un nudo K , donde el número de cruces no se puede reducir por medio un "flip", entonces éste es el mínimo número de cruces de un nudo.

Ejemplo 3.1. 2.2 14c Use el resultado de Kauffman-Murasugi-Thistlethwaite para encontrar el mínimo número de cruces del nudo de la siguiente figura.

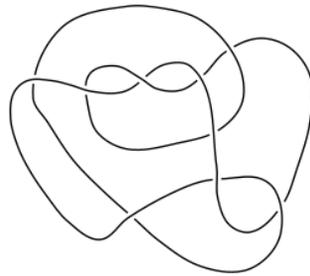


Figure 11: Determine el número de cruces

El nudo de la figura no es un nudo alternante, por lo que no podemos usar solamente el resultado de Kauffman-Murasugi-Thistlethwaite, si no que tendremos que mover segmentos del nudo con isotopías hasta llegar a un nudo alternante donde no se puedan hacer "flips".

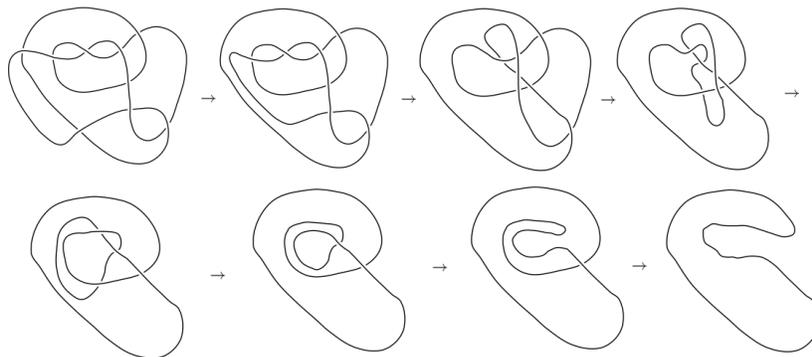


Figure 12: Isotopías y "flips" del nudo

Hemos llegado a un objeto claramente isotópico a S^1 , por lo que el nudo de la Figura 11 es equivalente al trivial.

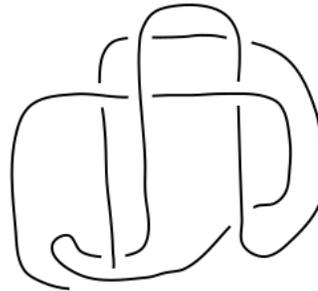
Ejemplo 3.2. Encuentre una sucesión de movimientos de Reidemeister que reduzca el número de cruces de del nudo no alternante siguiente.



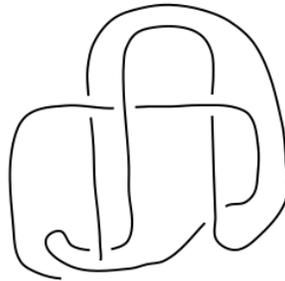
Figure 13: Determine el mínimo número de cruces



(a) Nudo después de un movimiento tipo III.



(b) Nudo después de un movimiento tipo II.



(c) Nudo después de otro movimiento tipo II.

El diagrama de nudo que obtenemos después de estos tres movimientos de Reidemeister es alternante y no es posible reducir el número de cruces por un "flip", entonces el resultado de Kauffman-Murasugi-Thistlethwaite nos dice que el número de cruces de éste resultante será el número de cruces del nudo.

Ahora que tenemos una noción de equivalencia más práctica podemos ver si

un proceso es un invariante o no de manera más rápida, pues bastará con que su diagrama se mantenga invariante bajo alguna combinación de los tres tipos de movimientos.

3.1 Polinomio de Alexander

Lo anterior nos permite hablar del Polinomio de Alexander, que demostraremos es un invariante de nudos con una orientación.

Para obtener el polinomio de Alexander es necesario nombrar los cruces del diagrama del nudo (x_1, x_2, \dots, x_n) y los arcos (a_1, a_2, \dots, a_n) , cabe aclarar que el arco de un nudo es el arco que se encuentra, al recorrer el nudo, desde la primera vez que se pasa por debajo en un cruce hasta que volvemos a pasar por debajo en otro cruce, entonces en cada cruce empieza un arco y otro termina, por esto el número de cruces y de arcos es el mismo.

Asignaremos además una orientación al nudo, así como índices a cada uno de los arcos que lo forman, es decir, al que comienza ahí, al que termina y al que pasa por arriba de ambos. Para esto empezaremos a recorrer el nudo en la orientación elegida y al llegar a la parte superior un cruce asignaremos $1 - t$ a ese arco, t al arco que quede a la izquierda y -1 al arco de la derecha.

Haremos una matriz con los índices de los arcos como columnas, los índices de los vértices como renglones y las etiquetas asignadas como entradas de manera que la ij -ésima entrada será la etiqueta del cruce x_i con el arco a_j . Removeremos una columna y un renglón de manera arbitraria y el determinante de la matriz que nos queda será el polinomio de Alexander. Veremos cómo calcularlo con ayuda de un ejemplo simple

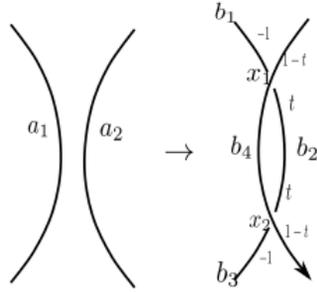
Ejemplo 3.3. *Calcula el Polinomio de Alexander para el nudo ocho siguiente*

$$\begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ x_1 & \begin{pmatrix} -1 & t & 0 & 1-t \\ 0 & 1-t & -1 & t \\ 1-t & t & -1 & 0 \\ -1 & 0 & t & t \end{pmatrix} \\ x_2 & \\ x_3 & \\ x_4 & \end{matrix}$$

elegiremos quitar el cuarto renglón y la segunda columna, entonces

$$\begin{aligned} Pol_{al} &= \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1-t \\ 0 & -1 & t \\ 1-t & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -1(t) + (1-t)(1-t) \\ &= t^2 - 2t + 1 - t \\ &= t^2 - 3t + 1 \end{aligned}$$

El aspecto más increíble del descubrimiento de Alexander es que el polinomio se mantendrá invariante, salvo multiplicación por un factor de $\pm t^k$ para hacer



Ahora obtenemos dos nuevos cruces y el arco a_1 se parte en tres arcos b_1 , b_2 , y b_3 , mientras que a_2 no se corta pero para facilitar la lectura de la nueva matriz lo renombraremos b_4 .

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix} Q \rightarrow \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ x_1 & \begin{bmatrix} -1 & t & 0 & 1-t & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ x_2 & \begin{bmatrix} 0 & t & -1 & 1-t & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ b_{11} & 0 & b_{13} & a_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & Q \\ b_{m1} & 0 & b_{m3} & a_{m2} \end{matrix}$$

Al igual que en el caso anterior agregamos los nuevos cruces y cambiamos las columnas por los nuevos arcos. Sin embargo, ahora no podemos simplemente eliminar el mismo renglón en ambas y después elegir una columna en la segunda. Pero al observar la nueva matriz, es notable que si no tomamos en cuenta los primeros dos renglones y las primeras tres columnas tenemos una matriz casi igual a la original excepto por la primera columna, pero esa columna es b_3 que, sumada con b_1 nos regresa a a_1 .

Entonces tenemos una situación similar a la del tipo anterior (donde teníamos a la matriz Q dentro de la nueva matriz) y para que sea más similar aún y evitar problemas con los cálculos, haremos las entradas que están sobre nuestra matriz original iguales a cero por medio de combinaciones lineales con la columna b_2 .

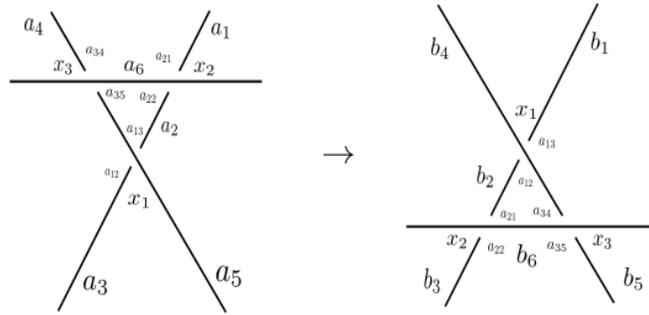
$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 + b_1 + t^{-1}b_2 & b_4 + (1 - t^{-1})b_2 \\ -1 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & 0 & a_{11} & a_{12} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & Q \\ b_{m1} & 0 & a_{m1} & a_{m2} & & & \end{bmatrix}$$

Ahora bien, digamos que después de eliminar una columna y un renglón de la matriz original obtenemos un determinante P. Elijamos la columna y el renglón que serán eliminados en la nueva matriz de forma que las entradas coincidan con la matriz original que tenemos dentro, entonces su determinante será

$$P' = P \det \begin{bmatrix} -1 & t \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

$$= (-t)P$$

donde de nuevo podemos eliminar el factor $-t$ y entonces los polinomios normalizados serán iguales.



En este caso podremos generalizar un poco más y evitando usar una orientación específica, asignaremos a_{12} , a_{13} , a_{21} , a_{22} , a_{34} y a_{35} para denotar los cruces que quedan por debajo, es decir cada uno será -1 ó t una vez añadida la orientación. Al hacer el tercer movimiento obtenemos una rotación en los índices de los cruces y la misma cantidad de arcos pero con nuevos índices.

$$\begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & & & \\ x_1 & \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 1-t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & 1-t & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & & & & & & \\ & \vdots & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \end{array} \right] & & \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{cccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ \left[\begin{array}{cccccc} a_{12} & a_{13} & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 1-t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & 1-t & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & & & & & & \\ & \vdots & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \end{array} \right] \end{array}$$

Si eliminamos el primer renglón y la primera columna de ambas matrices podemos hacer combinaciones de columnas en la segunda para obtener matrices iguales.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{cccccc} b_1 & (a_{22}/a_{21})b_2 & b_3 - (a_{22}/a_{21})b_2 & b_4 & b_5 & b_6 & * & * & * \\ \left[\begin{array}{cccccc} a_{12} & (a_{22}/a_{21})a_{13} & -(a_{22}/a_{21})a_{13} & 1-t & * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & 1-t & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \end{array} \right] \end{array}$$

Claramente sus determinantes serán iguales, entonces de nuevo el polinomio de Alexander es un invariante con el tercer tipo y por tanto un invariante de todo nuedo. ■

References

- [1] R. MESSER y P. STRAFFIN, *Topology Now!(Classroom Resource Material)*, primera edición, The Mathematical Association of America, 2006. 1-77.
- [2] J. R. MUNKRES, *TOPOLOGY a first course*, primera edición, Prentice Hall College Div, 1974.