

REPORTE DEL TERCER VERANO DE INVESTIGACIÓN

**A VECES PODEMOS ESCUCHAR
LA FORMA DE UN TAMBOR**

21 de agosto de 2018

Profesor encargado:
Dr. Carlos Villegas Blas

Javier Armando Rubio Rivera
Universidad de Sonora
Departamento de Matemáticas

Se agradece apoyo económico para el desarrollo del presente proyecto al:

Proyecto FORDECYT 265667 “Programa para un avance global e integrado de la Matemática Mexicana”.

Introducción

La teoría espectral en matemáticas es un termino que se utiliza para el estudio de los eigenvalores y sus correspondientes eigenvectores en espacios vectoriales, como puede ser el espacio de operadores acotados.

Sus aplicaciones en física principalmente se conciernen con la vibración de varios objetos, como átomos o moléculas. Muchos de los problemas de física referentes a vibraciones buscan encontrar la forma en la que los objetos vibran, y las frecuencias de la vibración.

En 1966, Mark Kac publica su celebre artículo, *Can One Hear the Shape of a Drum?*. En este artículo, al encontrar propiedades interesantes sobre la geometría de un ‘tambor’ y su espectro, plantea el problema de si se puede determinar de manera única una región del espacio conociendo las frecuencias a las que vibra (salvo movimientos rígidos). Esta cuestión se trabajo estudiando casos análogos, hasta que en 1992, Carolyn Gordon, David Webb, y Scott Wolpert dieron la respuesta a la pregunta.

El problema más común (problema directo) se puede plantear de la siguiente manera: Sea Ω una región en el plano. Dadas condiciones iniciales de la región, y condición en la frontera $u(x, y, t) = 0$, $\forall (x, y) \in \partial\Omega$, encontrar $u(x, y, t)$ que satisfaga lo anterior, y la ecuación de onda.

El problema que nos interesa resolver es el inverso del anterior. Si conocemos el conjunto de frecuencias de la vibración, contadas con sus multiplicidades, queremos determinar la región de donde proviene la vibración.

Definición 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que u es una vibración en Ω si u satisface la ecuación de onda.

Lo que la vibración representa depende de lo que se esté modelando. Por ejemplo, puede representar el desplazamiento normal a la región si se trata de una onda mecánica, o la presión de aire en un punto al tratarse de una onda acústica, etc.

Definición 2. Sea Ω una región. A las vibraciones u que cumplan la ecuación

$$\Delta u = -\lambda u \tag{1}$$

en Ω se llamaran eigenfunciones del operador Δ en Ω , o simplemente eigenfunciones de Ω . A los valores de λ que satisfagan (1) se llamaran eigenvalores.

Las frecuencias de la vibración se pueden obtener a partir de sus eigenvalores, por lo que se usaran los terminos frecuencias y eigenvalores indistinguidamente.

La Ecuación de Onda

La ecuación de onda en n dimensiones toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$$

Para derivar esta ecuación, tomamos un modelo del medio de propagación de la onda infinitesimal, usualmente una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con la tensión actuando de manera normal en $\partial\Omega$, y aplicamos la segunda ley de Newton para obtener la ecuación.

Es necesario mencionar que en la deducción se suponen tensiones y densidades constantes. En general, las ondas no actúan de manera lineal, ya que al deducir la ecuación, ignoramos las fuerzas externas actuando sobre Ω , pero esta aproximación lineal es suficientemente buena para lo que necesitamos.

Esta ecuación nos da dos propiedades importantes que se utilizarán en el reporte.

La primera propiedad es de *superposición*, que nos dice que la suma y producto escalar de soluciones a la ecuación de onda es de nuevo una solución a la ecuación de onda (Figura 1).

La segunda propiedad es de reflexividad, es decir, podemos extender de manera suave la solución a través de la frontera como el reflejo negativo de la vibración (Figura 2).

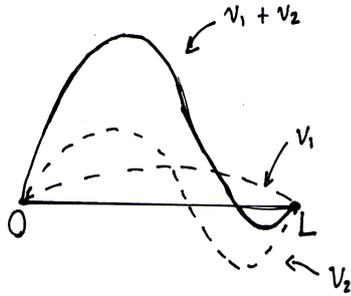


Figura 1: *
Propiedad de superposición

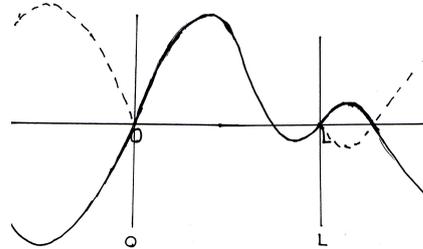


Figura 2: *
Propiedad de reflexividad

Solución del Problema Directo

En la cuerda

Primero consideramos el caso más sencillo del problema. Modelamos a una cuerda finita con el intervalo $[0, L]$ y la vibración $u(x, t)$, con $x \in [0, L]$. En este entorno, la interpretación de u es el desplazamiento vertical del punto x al tiempo t . En la cuerda, la condición de Dirichlet se ve de la siguiente manera.

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

Para resolver esta ecuación, buscamos soluciones estacionarias de la forma $u(x, y) = v(x)g(t)$, donde v solo depende de la posición, y g solo depende del tiempo. Esto es razonable, pues podemos interpretar a $v(x)g(t)$ como una onda fija dada por $v(x)$ cuya amplitud es alterada en el tiempo por $g(t)$.

Al considerar las condiciones de frontera de $u(x, t)$, en nuestra forma estacionaria se interpretan de la siguiente forma.

$$v(0)g(t) = 0 = v(L)g(t) \quad \forall t$$

De aquí se derivan dos casos, $v(0) = 0 = v(L)$ ó $g(t) = 0$ para todo t . El primer caso impone condiciones en la frontera para v , mientras que el segundo caso implica la solución trivial.

Al sustituir $v(x)g(t)$ en la ecuación de onda obtenemos

$$v(x)g''(t) = v''(x)g(t)$$

o equivalentemente

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)}$$

El lado izquierdo es independiente de t , y el derecho de x , por lo tanto, ambos lados deben ser igual a la misma constante, $-\lambda$. Utilizando la fórmula de Green, se puede demostrar que $\lambda > 0$. Por lo tanto, v es determinada por la ecuación diferencial

$$v'' + \lambda v = 0$$

y con las condiciones de frontera

$$v(0) = v(L) = 0$$

La solución general de esta ecuación homogénea lineal está dada por

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{0x} \left(A \sin \sqrt{\lambda}x + B \cos \sqrt{\lambda}x \right) \\ &= A \sin \sqrt{\lambda}x + B \cos \sqrt{\lambda}x \end{aligned}$$

Al aplicar las condiciones en la frontera, nos da restricciones sobre las soluciones.

Si $v(0) = 0$, esto implica que $B = 0$. La otra condición en la frontera, $v(L) = 0$ implica que $\sqrt{\lambda}L$ es un múltiplo entero de π . Por lo tanto, λ debe tener la siguiente forma.

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

La teoría de Fourier nos dice que los términos de la forma $A \sin \sqrt{\lambda}x + B \cos \sqrt{\lambda}x$ forman una base ortonormal, pero al ser v parte de la vibración, obedece el principio de reflexividad, así que podemos extender v a $[-L, L]$ como función impar, pero los coeficientes de Fourier para una función impar se anulan en los cosenos, así, es suficiente tomar suma de senos para tener una base ortonormal para las vibraciones en $[0, L]$.

Para determinar $g(t)$, tenemos la ecuación diferencial

$$g'' + \lambda g = 0$$

cuya solución general es

$$g(t) = C \sin \sqrt{\lambda}t + D \cos \sqrt{\lambda}t$$

donde las constantes C y D son determinadas por la forma y velocidad inicial de la cuerda. Por lo tanto, para cada natural n , hay una solución de $u(x, t)$ de la forma

$$u(x, t) = \left(A \sin \frac{n\pi}{L}x \right) \left(C \sin \frac{n\pi}{L}t + D \cos \frac{n\pi}{L}t \right)$$

Como consecuencia del principio de superposición de la ecuación de onda, podemos obtener una solución más general de u , la cual es

$$\sum_n \left(A_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \left(C_n \sin \frac{n\pi}{L} t + D_n \cos \frac{n\pi}{L} t \right)$$

Regresando al problema original, encontrar la longitud de la cuerda a través de su espectro. La frecuencia de $\sin(kt)$ esta dada por $\frac{k}{2\pi}$, y además

$$v(x) = A \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Así, la frecuencia de $v(x)$ es $\frac{n}{2L}$. A partir de la frecuencia más baja, $\frac{1}{2L}$, podemos conocer L

En una membrana rectangular

Ahora tomamos una región acotada del plano Ω , con la vibración $u(x, y, t)$, donde este valor representa el desplazamiento vertical del punto (x, y) al tiempo t . De nuevo, u debe satisfacer la condición.

$$u(x, y, t) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega, \quad \forall t$$

Para encontrar soluciones, aplicamos la técnica utilizada en el caso de la cuerda. Expresamos a u como producto de una función espacial, y otra temporal de la siguiente manera.

$$u(x, y, t) = v(x, y)g(t)$$

Y de la misma manera que en el caso de la cuerda, sustituimos $v(x, y)g(t)$ en la ecuación de onda y obtenemos

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{g''}{g}$$

Lo que nos lleva a las ecuaciones

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

$$g'' + \lambda g = 0$$

Las soluciones de la ecuación temporal son iguales que en el caso de la cuerda una vez determinemos los posibles valores de λ . El problema es, existen pocas regiones Ω para los cuales podemos calcular los valores de λ , por lo que es difícil esperar que solo los eigenvalores nos definan completamente la forma de la región Ω .

Sin embargo, los eigenvalores de la región aun nos pueden dar información de ella. En nuestro caso, primero analizaremos regiones especiales para extender los métodos a otro tipo de regiones. Considerando el caso particular donde Ω es un rectángulo, ahí se conocen las soluciones de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda v = 0$$

con condición en la frontera $v=0$, con lados a y b son

$$A_{lm} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (l, m = 1, 2, 3, \dots)$$

Estas soluciones se obtienen a partir de una separación de variables, al expresar v como

$$v(x, y) = v_1(x)v_2(y)$$

Al igual que en la cuerda, la teoría de Fourier nos dice que

$$\sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \cos \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \sin \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \cos \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (l, m = 1, 2, 3, \dots)$$

forman una base ortonormal en $[-a, a] \times [-b, b]$, pero al ser $v(x, y)$ parte de una vibración, es suficiente tomar sumas del tipo $\sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$ ($l, m = 1, 2, 3, \dots$).

Otra condición que se necesitara es cuando se cumple la condición de Neumann ($\frac{\partial v}{\partial n} = 0$), cuya solución se deriva de la solución con la condición de Dirichlet, y esta es

$$B_{lm} \cos \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (l, m = 0, 1, 2, \dots)$$

En una membrana circular

Para una membrana circular, también podemos encontrar soluciones explícitas de la ecuación de onda. Durante esto, vamos a suponer que la membrana tiene radio 1. En coordenadas polares, la ecuación para encontrar eigenvalores toma la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \lambda v = 0$$

Aquí, la condición de Dirichlet toma la forma $v(1, \theta) = 0$

Si tratamos de resolver la ecuación por medio de separación de variables haciendo $v(r, \theta) = f(r)h(\theta)$, obtenemos la relación

$$\frac{r^2 (f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \lambda f(r))}{f(r)} = -\frac{h''(\theta)}{h(\theta)} = \text{cte.} = c$$

Como $v(r, \theta)$ y por tanto $h(\theta)$ debe ser una función periódica en θ con periodo 2π , se sigue que c tiene valor $c = -n^2$, donde n es cualquier entero no negativo. Al igual que en otros casos anteriores, obtenemos

$$h(\theta) = a \cos n\theta + b \sin n\theta$$

Haciendo $f(r) = y$, tenemos la ecuación diferencial

$$r^2 y'' + r y' + (r^2 \lambda - n^2) y = 0 \quad (2)$$

Ahora queremos encontrar eigenvalores λ para los cuales exista una solución a (2), que sea continua en $r = 0$, y que satisfaga la condición de frontera $y(1) = 0$.

Si hacemos la transformación $r\sqrt{\lambda} = \rho$ ($\lambda \neq 0$) o $kr = \rho$ con $k^2 = \lambda$, (2) toma la forma

$$\frac{d^2 y}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dy}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) y = 0$$

Las soluciones a esta ecuación de Bessel son llamadas las funciones de Bessel. Si escribimos a y como una serie de potencias $y(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \rho^m$ obtenemos la solución

$$\begin{aligned} y(\rho) &= J_n(\rho) \\ &= \frac{\rho^n}{2^n n!} \left[1 - \frac{\rho^2}{2(2n+2)} + \frac{\rho^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right] \end{aligned}$$

que es llamada la función de Bessel de orden n .

Notamos la relación $J_0'(\rho) = J_1(\rho)$, la cual es sigue de su representación en serie de potencias.

Podemos escribir las soluciones de (2) en la forma

$$y_n = J_n(kr)$$

donde k es determinada por $y_n(1) = 0$, es decir $J_n(k) = 0$

Por lo tanto, los eigenvalores de (2) son los cuadrados de los ceros de las funciones de Bessel. Cada función J_n tiene una infinidad de ceros, los cuales denotaremos por $k_{n,m}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$). Así, podemos expresar a las eigenfunciones de la membrana circular en la forma

$$J_n(rk_{n,m}) (\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta)$$

Formula de Weyl

Si analizamos la distribución asintótica de los eigenvalores de Δv , podemos obtener información de la región.

En un rectángulo

Ya calculamos explícitamente los eigenvalores y eigenfunciones de $\Delta v + \lambda v = 0$ en una región rectangular de lados a y b con condición de Dirichlet son

$$A_{lm} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad (l, m = 1, 2, 3, \dots)$$

Y con la condición de Neumann, se deriva del caso de condición de Dirichlet que las eigenfunciones y eigenvalores son

$$A_{lm} \cos \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \quad \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad (l, m = 0, 1, 2, \dots)$$

Si llamamos $A(\lambda)$ al número de eigenvalores menores que λ con condición de Dirichlet, y $B(\lambda)$ al número de eigenvalores menores que λ con condición de Neumann, entonces cada uno de ellos es igual al número de soluciones enteras de la desigualdad

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2}$$

donde se permite que l y m sean cero si se trata de la condición de Neumann.

Queremos obtener información de Ω a través del comportamiento asintótico de $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ para valores grandes de λ . Para deducir $B(\lambda)$, notamos que $B(\lambda)$ es igual al número de puntos láticos (puntos con coordenadas enteras) dentro de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\lambda}{\pi^2}$$

que además se encuentren en la región $x \geq 0, y \geq 0$.

Si a cada punto lático le asociamos el cuadrado unitario superior derecho, obtenemos que esa cuadrícula cubre al sector de la elipse. Si llamamos $R(\lambda)$ al número de cuadrados que contiene parte del arco de elipse, el área anterior menos $R(\lambda)$ esta contenido dentro de la elipse. Por lo tanto

$$B(\lambda) - R(\lambda) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{\lambda}a}{\pi} \right) \left(\frac{\sqrt{\lambda}b}{\pi} \right) \leq B(\lambda)$$

o bien

$$B(\lambda) - R(\lambda) \leq \lambda \frac{ab}{4\pi} \leq B(\lambda)$$

Para λ grande, el arco de elipse contenido en dos cuadrados consecutivos es al menos 1, por lo tanto $R(\lambda) - 1$ es a lo más el doble de la longitud del arco de la elipse.

La longitud del arco de elipse aproximadamente es $\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, por lo tanto

$$R(\lambda) - 1 \leq \sqrt{\lambda}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

así

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B(\lambda) - R(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{ab}{4\pi} \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda}$$

y además

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{R(\lambda)}{\lambda} = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda} = \frac{ab}{4\pi}$$

Esto también es válido para $A(\lambda)$, pues el número de puntos láticos en los ejes es asintóticamente igual a $\frac{a+b}{\pi}\sqrt{\lambda}$, y si identificamos al número de estos cuadrados con $S(\lambda)$, tenemos

$$A(\lambda) = B(\lambda) - S(\lambda)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda} - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{S(\lambda)}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda}$$

Por lo tanto, podemos obtener al área del rectángulo a partir de la distribución de los eigenvalores de la región.

En regiones cuadrículadas

Ahora queremos ver que sucede con la distribución de los eigenvalores en regiones que pueden ser descompuestas en un número finito de cuadrados, digamos h , con lado a cada uno. Llamaremos Q_1, Q_2, \dots, Q_h a los cuadrados, $A_{Q_i}(\lambda)$ al número de eigenvalores menores que λ con la condición de Dirichlet en Q_i , y a $B_{Q_i}(\lambda)$ al mismo número pero con la condición de Neumann.

Para continuar, se requeriran los siguientes teoremas.

Teorema 1. *Suponga que $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots, \Omega^{(n)}$ son un número finito de subregiones ajenas de la región Ω . Sea $A_{\Omega^{(i)}}(\lambda)$ el número de eigenvalores menores que λ en la región $\Omega^{(i)}$ con condición de Dirichlet. Entonces el número total de eigenvalores en las subregiones es acotado superiormente por el número de eigenvalores de la región Ω , es decir*

$$A_{\Omega^{(1)}}(\lambda) + A_{\Omega^{(2)}}(\lambda) + \dots + A_{\Omega^{(n)}}(\lambda) \leq A(\lambda)$$

Teorema 2. *Suponga que $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots, \Omega^{(n)}$ son un número finito de subregiones ajenas de la región Ω . Sea $B_{\Omega^{(i)}}(\lambda)$ el número de eigenvalores menores que λ en la región $\Omega^{(i)}$ con condición de Neumann. Entonces el número total de eigenvalores en las subregiones es acotado inferiormente por el número de eigenvalores de la región Ω , es decir*

$$B(\lambda) \leq B_{\Omega^{(1)}}(\lambda) + B_{\Omega^{(2)}}(\lambda) + \dots + B_{\Omega^{(n)}}(\lambda)$$

Teorema 3. *Sea λ_n el n -ésimo eigenvalor de la región Ω con la condición de frontera de Dirichlet, y sea μ_n el n -ésimo eigenvalor de la región Ω con la condición de frontera de Neumann. Entonces*

$$\mu_n \leq \lambda_n \quad \text{o equivalentemente} \quad A(\lambda) \leq B(\lambda)$$

Combinando estos tres teoremas, tenemos que

$$A_{Q_1}(\lambda) + \dots + A_{Q_h}(\lambda) \leq A(\lambda) \leq B(\lambda) \leq B_{Q_1}(\lambda) + \dots + B_{Q_h}(\lambda)$$

Dividiendo por λ y tomando límite obtenemos

$$\frac{1}{4\pi} \underbrace{(a^2 + \dots + a^2)}_{h\text{-veces}} \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda} \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{1}{4\pi} \underbrace{(a^2 + \dots + a^2)}_{h\text{-veces}}$$

Así

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda} = \frac{ha^2}{4\pi}$$

que es el área de la región Ω .

En una región arbitraria

Desearíamos que un comportamiento similar sucediera para cualquier región arbitraria Ω

Primero consideramos el caso de los eigenvalores de un triángulo rectángulo isósceles de cateto a . Por la propiedad de reflexión de las vibraciones, cualquier eigenvalor del triángulo también lo es del cuadrado de lado a (al reflejar por la hipotenusa), por lo tanto, el número de eigenvalores del triángulo con la condición de Neumann es menor que el número de eigenvalores del cuadrado de lado a .

Utilizando una transformación, podemos comparar el número de eigenvalores de un triángulo rectángulo de catetos a y b , con $a \geq b$, y un triángulo rectángulo isósceles con catetos a , y resulta que el n -ésimo eigenvalor del triángulo rectángulo no isósceles es mayor que en el caso isósceles, y por consiguiente, menor que el n -ésimo eigenvalor del cuadrado de lado a .

Combinando esto junto con el Teorema 2, obtenemos una cota superior para el número de eigenvalores menores que alguna cota para regiones que están formadas de un número finito de rectángulos y triángulos rectángulos. Para regiones arbitrarias, cuadrículamos, y obtenemos dos tipos de regiones.

Las r regiones que están 'cerca' de la frontera de Ω , que serán denotadas por E_i y una subregión es de este tipo si esta acotada por dos segmentos perpendiculares de la partición, cuyas longitudes esten entre a y $3a$, y una parte de la frontera (Figura 3), o si esta acotada por un segmento AB de la partición, dos segmentos de la partición perpendiculares a AB con longitudes entre a y $3a$, y un segmento de la frontera (Figura 4).

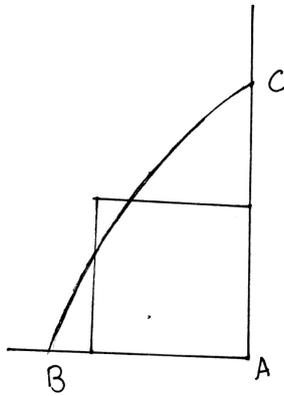


Figura 3: *
Un tipo de región tipo E_i

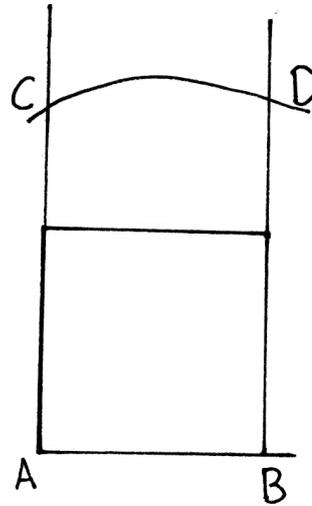


Figura 4: *
El otro tipo de región tipo E_i

Así, hemos dividido a Ω en las regiones E_i , y la región cuadrículada Q , que esta formada de h cuadrados de lado a . A cada cuadrado de Q lo denotaremos por Q_j .

Para poder controlar los eigenvalores de las regiones E_i , utilizaremos el siguiente teorema.

Teorema 4. Si una región Ω es deformada en otra región Ω' por una transformación de tipo

$$x' = x + g(x, y), \quad y' = y + h(x, y)$$

de tal forma que

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial y} \right| < \varepsilon$$

para cualquier $\varepsilon > 0$, entonces existe un número η que depende solo de ε y que se aproxima a 0 con ε , tal que para cualquiera de las condiciones de frontera mencionadas (Dirichlet y Neumann), el n -ésimo eigenvalor μ_n y μ'_n para las regiones Ω y Ω' respectivamente, satisface la relación

$$\left| \frac{\mu'_n}{\mu_n} - 1 \right| < \eta$$

La región que resulta de transformar E_i , cambiando el segmento de frontera de Ω por un segmento recto que aproxime a la frontera, la denotaremos por E'_i .

Sea $A_j(\lambda)$ el número de eigenvalores menores que λ en el cuadrado Q_j con condición de Dirichlet, $B_j(\lambda)$ con la condición de Neumann, y $B_{E_i}(\lambda)$ al número de eigenvalores menores que λ en la región E_i .

Del Teorema 4, para a suficientemente pequeña, $B_{E_i}(\lambda)$ y $B_{E'_i}(\lambda)$ son comparables, y por la forma de expresar a Ω' como un número finito de cuadrados y triángulos rectángulos, se satisface la relación

$$B_{E_i}(\lambda) < c_1 a^2 \lambda + c_2 a \sqrt{\lambda}$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

Entonces, de los teoremas 1, 2 y 3, tenemos

$$A_1(\lambda) + \dots + A_h(\lambda) \leq A(\lambda) \leq B(\lambda) \leq B_1(\lambda) + \dots + B_h(\lambda) + B_{E_1}(\lambda) + \dots + B_{E_r}(\lambda)$$

luego, para a suficientemente pequeña,

$$|B_{E_1}(\lambda) + \dots + B_{E_r}(\lambda)| < \delta, \quad \text{y así,} \quad |ha^2 - f| < \delta$$

Y de las desigualdades se sigue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda} = \frac{f}{4\pi}$$

donde f es el área de Ω , que es lo que queríamos.

Funciones asintóticas de Pleijel y Kac

Con el tiempo, la fórmula de Weyl se fue mejorando para ser más precisas. En 1954, el sueco Ake Pleijel publica que para la serie de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t}, t \rightarrow 0$$

Al estudiar la ecuación de difusión

$$\frac{1}{2} \Delta v = \lambda v$$

Y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4\sqrt{2\pi t}}, t \rightarrow 0$$

donde L es la longitud de la frontera de Ω .

En 1966, Mark Kac mejora este resultado, obteniendo la relación asintótica

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4\sqrt{2\pi t}} + \frac{1}{6}(1-r), t \rightarrow 0$$

donde r es el número de agujeros en la región Ω .

Por lo tanto, uno puede escuchar el área, el perímetro y la conexidad de Ω .

Tambores Gordon-Webb-Wolpert

Naturalmente cuando uno quiere resolver un problema, se pregunta si la proposición es válida para un caso más general. La pregunta que surgió de este proceso es *Can one hear the shape of a manifold?*.

En 1964, John Milnor respondió negativamente a la pregunta anterior al construir dos toros 16-dimensionales que tienen los mismos eigenvalores.

En 1984, Toshikazu Sunada crea una forma de construir variedades isoespectrales, utilizando nociones del álgebra y representaciones de grupos. Por una década se creyó que este método no ayudaba a responder la pregunta original de Kac, hasta que en 1990, Pierre Bérard descubrió una prueba alternativa al método de Sunada, de la cual Carolyn Gordon y David Webb utilizaron como base para construir un par de superficies isoespectrales, y así dar respuesta negativa a la pregunta de Mark Kac.

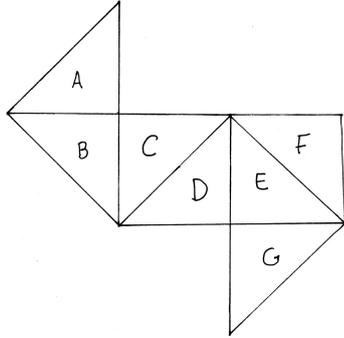


Figura 5: *

La región Ω_1 , junto con la vibración φ

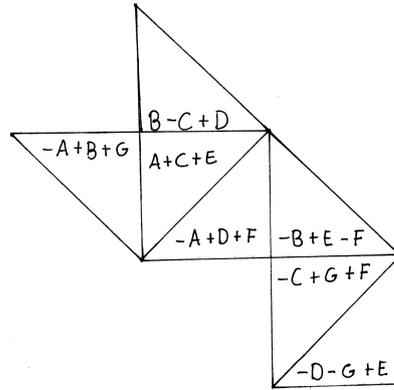


Figura 6: *

La región Ω_1 , junto con la vibración ψ

Notese que ambas regiones estan formadas por el mismo triángulo como base, y ademas tienen igual área y perímetro.

Para ver que estas superficies son isoespectrales, debemos transplantar una vibración de Ω_1 a Ω_2 y viceversa. La razón por la cual se eligieron estas vibraciones es muy técnica, pero es facil verificar que ambas superficies son isoespectrales por medio de transplantaciones.

Tomando φ y ψ como en la figura, para checar que si se pueden transplantar una sobre la otra, hay que verificar dos cosas. La primera condición es poder unir a las siete piezas de ψ en Ω_2 de forma suave. La segunda condición que se debe verificar es que ψ se anule en la frontera de Ω_2 .

Teorema de Zelditch

En el año 2000, Steve Zelditch da una respuesta positiva a la pregunta de Kac para una clase de regiones más restringidas.

Teorema 5. *Si $\text{Spec}(\Omega_1) = \text{Spec}(\Omega_2)$, Ω_1 y Ω_2 son simplemente conexos, tiene frontera real-analítica, y tienen dos ejes de simetría ortogonales, entonces $\Omega_1 = \Omega_2$ salvo un movimiento rígido.*

Con este teorema, hace parecer a los tambores Gordon-Webb-Wolpert como un caso aislado, y que bajo tales condiciones si podemos determinar de forma única la región. Por lo tanto, a veces podemos escuchar la forma de un tambor.

Referencias

Richard Courant, D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics Vol.1*

Pleijel A., *A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes*, Arkiv for Matematik, 2 (1954) 553-569

Kac M., *Can One Hear the Shape of a Drum?*, American Mathematical Monthly, Vol. 73, Issue 4, Part 2: Papers in Analysis (Apr. 1966), 1-23

Sunada T., *Riemannian coverings and isospectral manifolds*, Ann. Math, 121, 248-277 (1985)

Bérard P., *Variétés Riemanniennes-isospectrales non isométriques*. Astérisque 177-178, 127-154 (1989)

Gordon C., Webb D., Wolpert S., *One can't hear the shape of a drum*. Bull. Ann Math Soc. 27, 134-138 (1992)

Gordon C., Webb D., Wolpert S., *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Invent. Math. 110, 1-22 (1992)

Zelditch S., *Spectral determination of analytic bi-axisymmetric plane domains*, Geometric and Functional Analysis 10, 628-677 (2000)