



Instituto de  
Matemáticas

# Simetrías en soluciones de ecuaciones elípticas y de reacción-difusión

Alberto Saldaña.

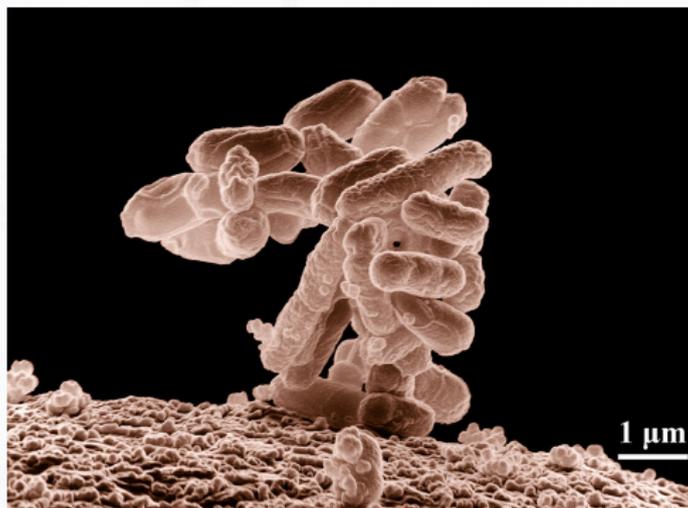
Coloquio de Matemáticas Aplicadas, IIMAS - FENOMECC.

Miércoles 6 de Noviembre, 2019.

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) son uno de los objetos matemáticos más exitosos para modelar fenómenos del mundo real.

Las EDPs capturan la esencia del **cambio**, ya sea **físico**, **químico**, **biológico**, social, ¡o **cualquier otra cosa!**

Existen modelos para dinámicas de población...



$$\partial_t u - \Delta u = \lambda u - u^2$$

...para difusión del calor...



$$\partial_t \phi - \Delta \phi = f(\phi, t)$$

...para burbujas de jabón...



$$\Delta p = \gamma \frac{2}{R}$$

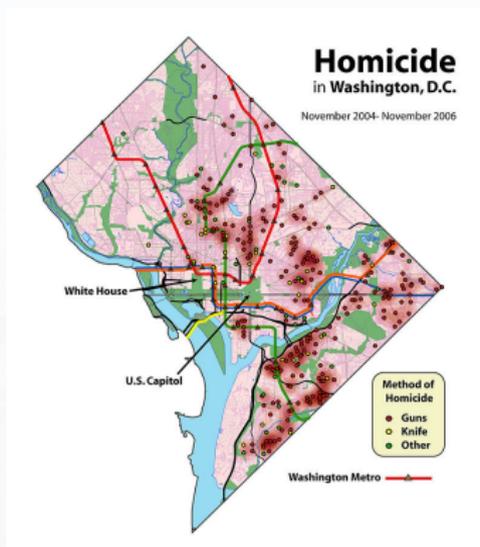
...para movimiento celular...



$$\partial_t u = \nabla(D_1 \nabla u - \chi u \nabla v) + f$$

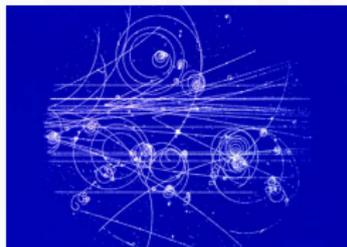
$$\partial_t v = D_2 \Delta v + g - h$$

...conglomerados de crimen...



$$\begin{aligned}\partial_t s &= \Delta s(x, t) - s(x, t) + s_b(x) \\ &+ (\rho(x) - c(x, t))u(x, t)\end{aligned}$$

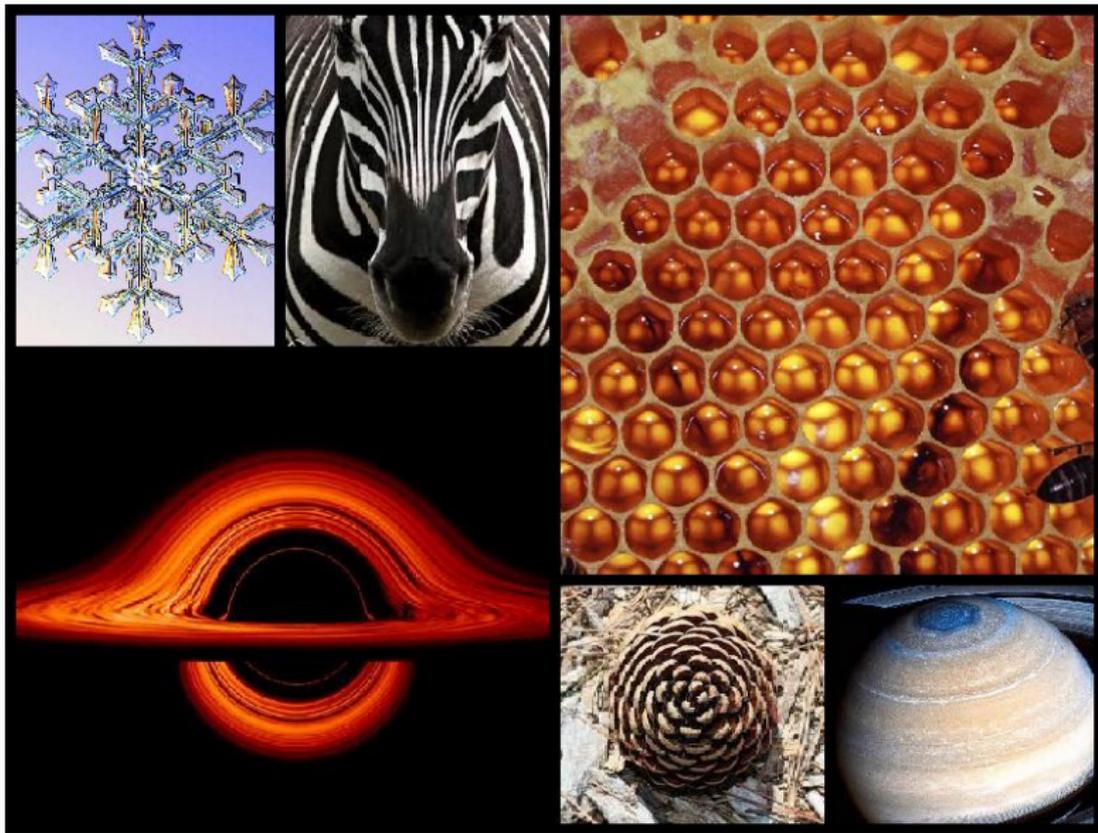
... ¡y existen muchos otros modelos!



*“El propósito de los modelos [matemáticos] **no** es ajustarse a los datos sino **afinar** las preguntas.”*

*—Samuel Karlin.*

# Simetría en la naturaleza



# Simetría en ecuaciones totalmente no lineales

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  y  $Q = \Omega \times (0, \infty)$ .

Ecuaciones elípticas:  $u \in C^2(\bar{\Omega})$

$$F(x, u, \nabla u, D^2u) = 0.$$

Ecuaciones parabólicas:  $u \in C^{2,1}(\bar{Q})$ ,

$$u_t(x, t) = F(x, t, u, \nabla u, D^2u).$$

# Simetría en las ecuaciones: Problemas modelo

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  y  $Q = \Omega \times (0, \infty)$ .

Ecuaciones elípticas:  $u \in C^2(\bar{\Omega})$

$$-\Delta u = f(x, u).$$

Ecuaciones parabólicas:  $u \in C^{2,1}(\bar{Q})$ ,

$$u_t - \Delta u = f(t, x, u).$$

Elementos que influyen directamente en la simetría:

- Condiciones de **frontera**.
- La **geometría** y la **topología** del dominio.
- La **no-linealidad**  $f$ .

# Simetría radial



# Problemas elípticos con condiciones de frontera

Sea  $B := \{|x| < 1\}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $u \in C^2(\overline{B})$  una solución de

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{en } B, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial B.$$



# Problemas elípticos con condiciones de frontera

Sea  $B := \{|x| < 1\}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $u \in C^2(\overline{B})$  una solución de

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{en } B, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial B.$$

**Pregunta:** ¿Se tiene que  $u$  siempre es radialmente simétrica?



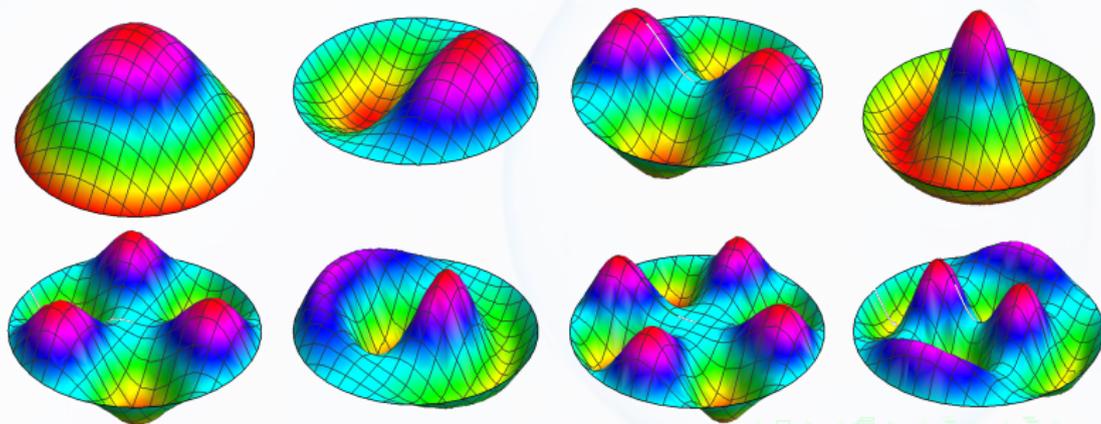
# Problemas elípticos con condiciones de frontera

Sea  $B := \{|x| < 1\}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $u \in C^2(\overline{B})$  una solución de

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{en } B, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial B.$$

**Pregunta:** ¿Se tiene que  $u$  siempre es radialmente simétrica?

**Respuesta:** No, por ejemplo,  $f(u) = \lambda_i u$ .



# Problemas elípticos con condiciones de frontera

Sea  $B := \{|x| < 1\}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $u \in C^2(\overline{B})$  una solución de

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{en } B, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial B.$$

**Pregunta:** ¿Se tiene que toda solución positiva  $u$  siempre es radialmente simétrica?



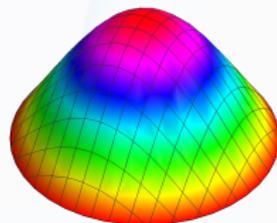
# Problemas elípticos con condiciones de frontera

Sea  $B := \{|x| < 1\}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $u \in C^2(\overline{B})$  una solución de

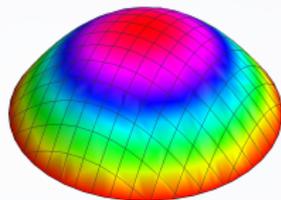
$$-\Delta u = f(u) \quad \text{en } B, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial B.$$

**Pregunta:** ¿Se tiene que toda solución positiva  $u$  siempre es radialmente simétrica?

**Respuesta:** ¡Sí! (Gidas, Ni, Nirenberg, 1979)



# El método del plano móvil (Aleksandrov, 1962; Serrin, 1971; GNN, 1979)

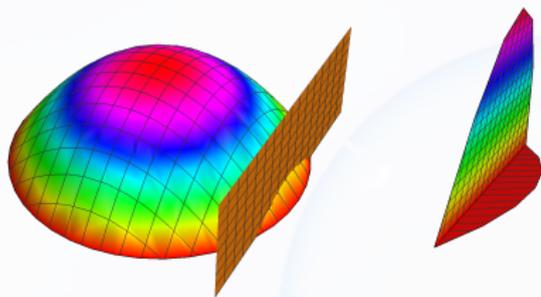


$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } B, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \\ u > 0 & \text{en } B, \end{cases}$$

# El método del plano móvil

Para  $\lambda \in (0, 1)$  sea  $x_\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $B_\lambda = B \cap \{x_1 > \lambda\}$  y

$$u_\lambda(x) = u(x_\lambda) - u(x), \quad c(x) = \frac{f(u(x_\lambda)) - f(u(x))}{u(x_\lambda) - u(x)}, \quad x \in B_\lambda.$$



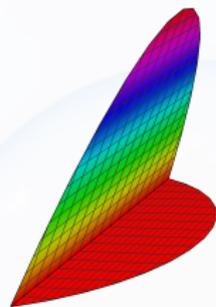
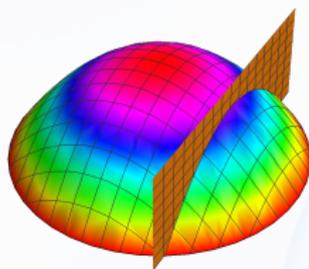
$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } B, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \\ u > 0 & \text{en } B, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = c(x)u_\lambda & \text{en } B_\lambda, \\ u_\lambda \geq 0 & \text{sobre } \partial B_\lambda, \end{cases}$$

# El método del plano móvil

Para  $\lambda \in (0, 1)$  sea  $x_\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $B_\lambda = B \cap \{x_1 > \lambda\}$  y

$$u_\lambda(x) = u(x_\lambda) - u(x), \quad c(x) = \frac{f(u(x_\lambda)) - f(u(x))}{u(x_\lambda) - u(x)}, \quad x \in B_\lambda.$$



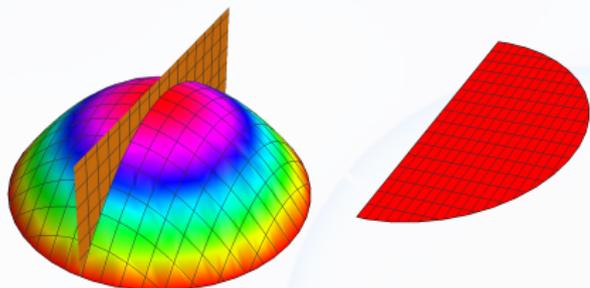
$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } B, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \\ u > 0 & \text{en } B, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = c(x)u_\lambda & \text{en } B_\lambda, \\ u_\lambda \geq 0 & \text{sobre } \partial B_\lambda, \end{cases}$$

# El método del plano móvil

Para  $\lambda \in (0, 1)$  sea  $x_\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $B_\lambda = B \cap \{x_1 > \lambda\}$  y

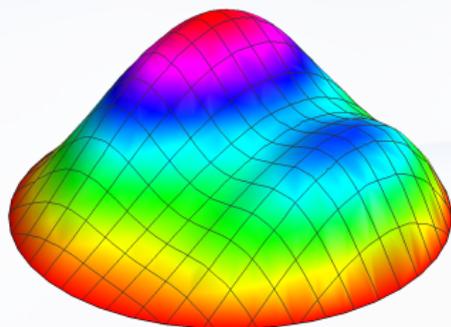
$$u_\lambda(x) = u(x_\lambda) - u(x), \quad c(x) = \frac{f(u(x_\lambda)) - f(u(x))}{u(x_\lambda) - u(x)}, \quad x \in B_\lambda.$$



$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } B, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \\ u > 0 & \text{en } B, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = c(x)u_\lambda & \text{en } B_\lambda, \\ u_\lambda \geq 0 & \text{sobre } \partial B_\lambda, \end{cases}$$

# El método del plano móvil

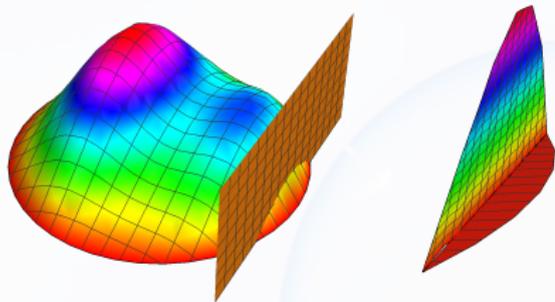


$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } B, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \\ u > 0 & \text{en } B, \end{cases}$$

# El método del plano móvil

Para  $\lambda \in (0, 1)$  sea  $x_\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $B_\lambda = B \cap \{x_1 > \lambda\}$  y

$$u_\lambda(x) = u(x_\lambda) - u(x), \quad c(x) = \frac{f(u(x_\lambda)) - f(u(x))}{u(x_\lambda) - u(x)}, \quad x \in B_\lambda.$$



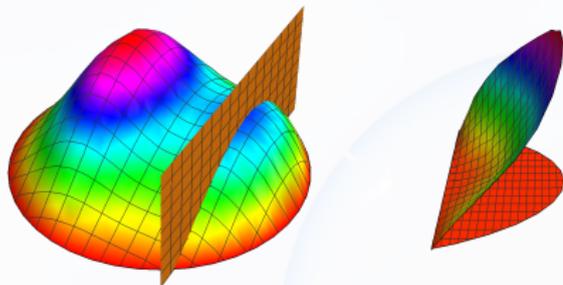
$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } B, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \\ u > 0 & \text{en } B, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = c(x)u_\lambda & \text{en } B_\lambda, \\ u_\lambda \geq 0 & \text{sobre } \partial B_\lambda, \end{cases}$$

# El método del plano móvil

Para  $\lambda \in (0, 1)$  sea  $x_\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $B_\lambda = B \cap \{x_1 > \lambda\}$  y

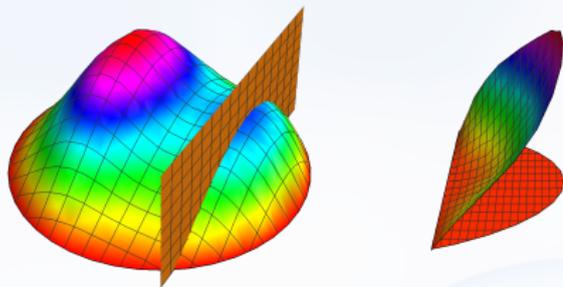
$$u_\lambda(x) = u(x_\lambda) - u(x), \quad c(x) = \frac{f(u(x_\lambda)) - f(u(x))}{u(x_\lambda) - u(x)}, \quad x \in B_\lambda.$$



$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } B, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \\ u > 0 & \text{en } B, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = c(x)u_\lambda & \text{en } B_\lambda, \\ u_\lambda \geq 0 & \text{sobre } \partial B_\lambda, \end{cases}$$

Pero por el principio del máximo...



$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = c(x)u_\lambda \\ u_\lambda \geq 0 \end{cases} \text{ en } B_\lambda, \implies \begin{cases} u_\lambda > 0 \\ \partial_\nu u_\lambda < 0 \end{cases} \text{ en } B_\lambda, \text{ sobre } \partial B_\lambda,$$



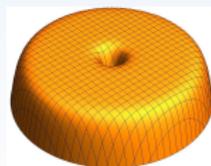
# Generalizaciones y limitaciones

- + Ecuaciones totalmente no lineales:  $F(|x|, u, \nabla u, D^2u) = 0$ .
- + Dominios que son convexos en una dirección.

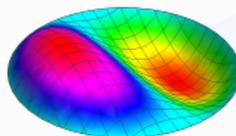


# Generalizaciones y limitaciones

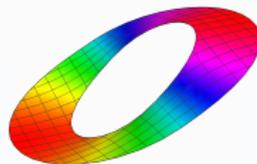
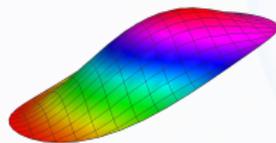
- El dominio debe ser simplemente conexo.



- La solución debe ser positiva.

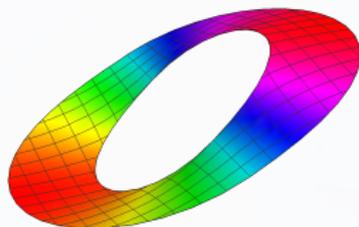
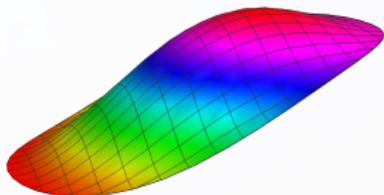
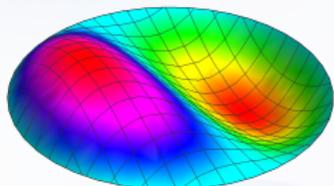
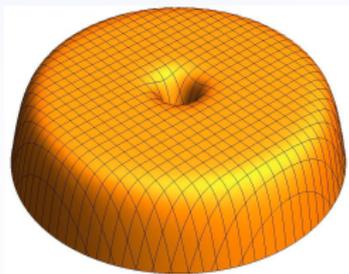


- Se necesitan condiciones de frontera de Dirichlet.



- El mapeo  $s \mapsto F(s, a, p, q)$  debe ser monótono decreciente para  $s > 0$ .

En estos casos, ¿se puede rescatar algo de simetría?

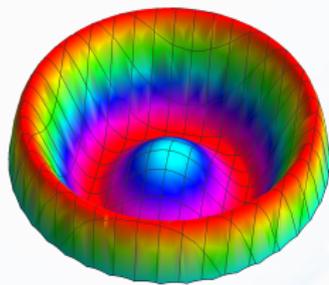
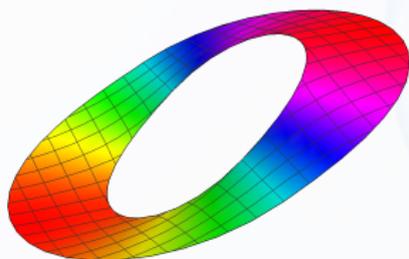
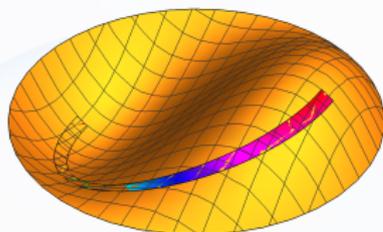
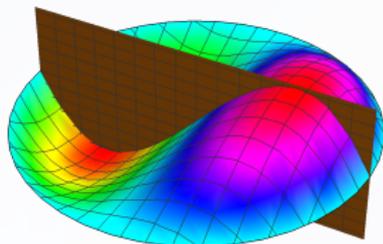


# Simetría axial



# Simetría foliada de Schwarz

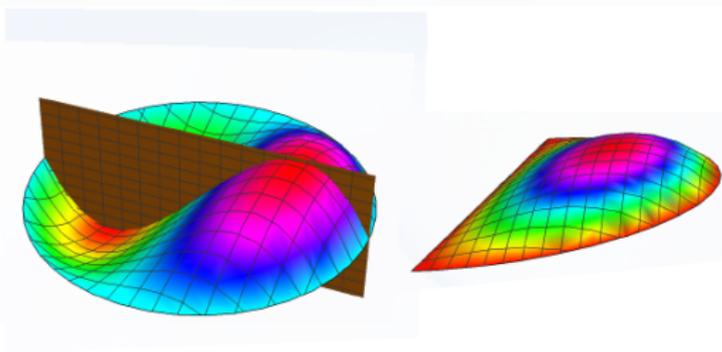
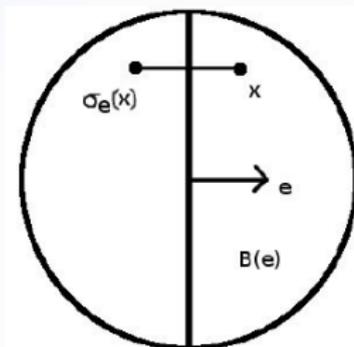
Sea  $u \in C^2(\Omega)$  donde  $\Omega = B$  o bien  $\Omega = \{r < |x| < 1\}$  con  $r > 0$ . Decimos que  $u$  es **simétrica foliada de Schwarz** si existe  $p \in \mathbb{R}^N$ ,  $|p| = 1$ , tal que  $u$  es **axialmente simétrica** respecto a  $\mathbb{R}p$  y **no creciente** respecto al ángulo polar  $\theta = \arccos\left(\frac{x}{|x|} \cdot p\right) \in [0, \pi]$ .



# El método del plano rotante (notación)

Para  $e, x \in \mathbb{R}^N$ ,  $|e| = 1$ , sean

$$B(e) = B \cap \{x \cdot e > 0\}, \quad \sigma_e(x) = x - 2(x \cdot e)e, \quad u^e(x) = u(x) - u(\sigma_e(x)).$$

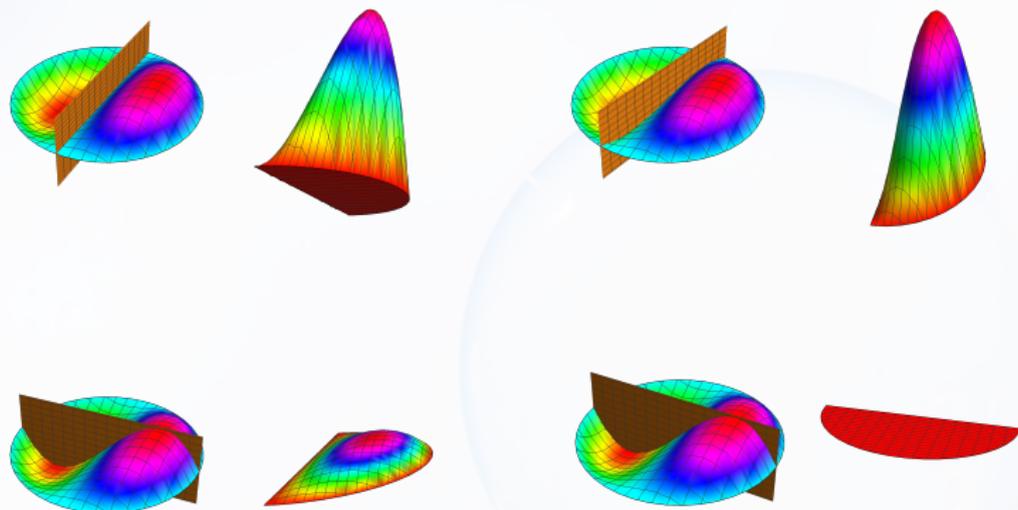


# El método del plano rotante (caracterización de la s.f.S.)

Si  $u \in C^2(\Omega)$  es tal que, para todo  $e \in S$ ,

$$u^e \geq 0 \quad \text{en } B(e) \quad \text{o} \quad u^e \leq 0 \quad \text{en } B(e),$$

entonces  $u$  es simétrica foliada de Schwarz (Brock, 2003).

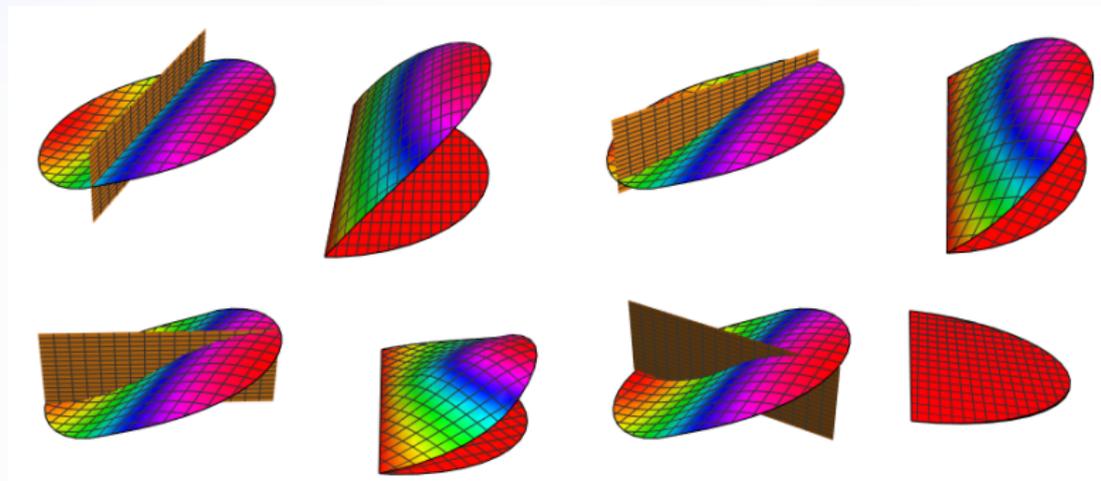


# El método del plano rotante (caracterización de la s.f.S.)

Si  $u \in C^2(\Omega)$  es tal que, para todo  $e \in S$ ,

$$u^e \geq 0 \quad \text{en } B(e) \quad \text{o} \quad u^e \leq 0 \quad \text{en } B(e),$$

entonces  $u$  es simétrica foliada de Schwarz.

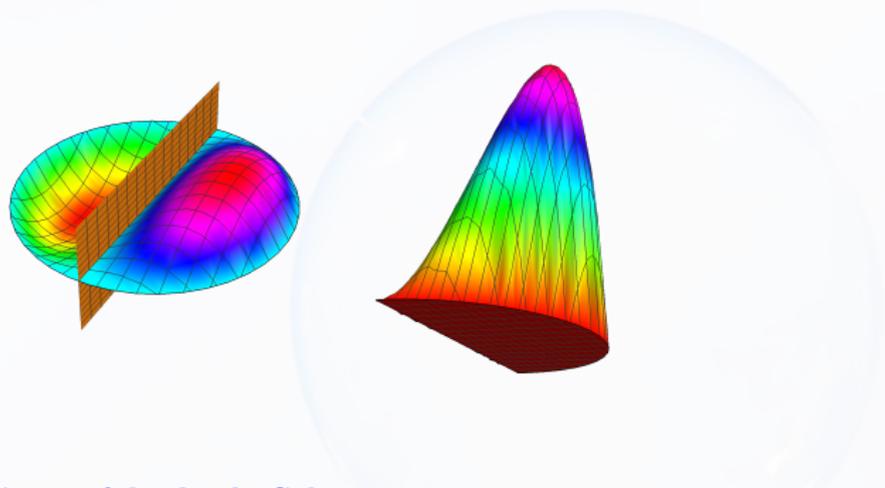


# El método del plano rotante

Sea  $u$  una solución de

$$-\Delta u = f(|x|, u) \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Supongamos que existe  $e \in S$  tal que  $u^e > 0$  en  $B(e)$ .



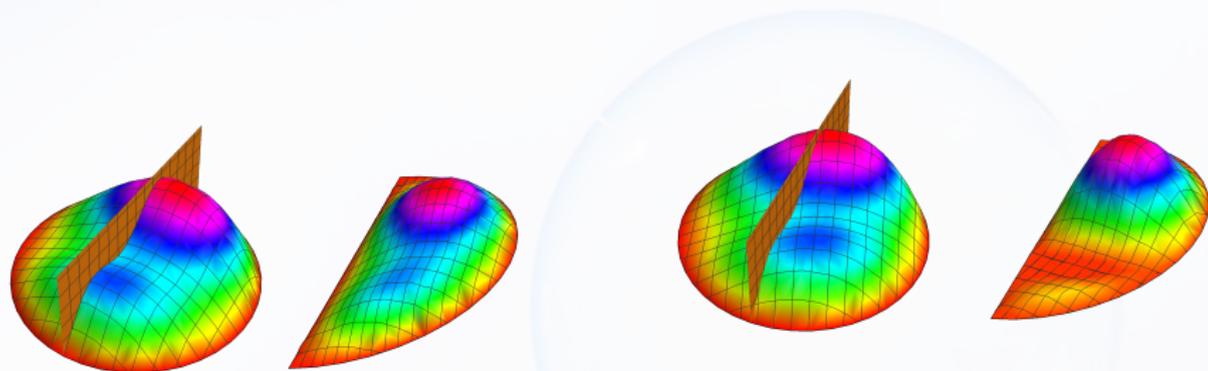
Entonces  $u$  es simétrica foliada de Schwarz.

# El método del plano rotante

Sea  $u$  una solución de

$$-\Delta u = f(|x|, u) \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Supongamos que existe  $e \in S$  tal que  $u^e > 0$  en  $B(e)$ .



# El método del plano rotante

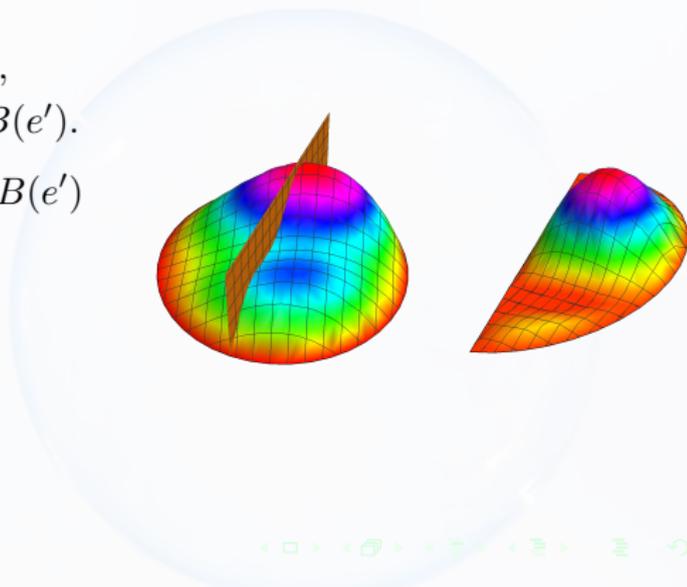
Sea  $u$  una solución de

$$-\Delta u = f(|x|, u) \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Supongamos que existe  $e \in S$  tal que  $u^e > 0$  en  $B(e)$ .

$$\begin{cases} -\Delta u^{e'} = c(x)u^{e'} & \text{en } B(e'), \\ u^{e'} = 0 & \text{sobre } \partial B(e'). \end{cases}$$

$$u^{e'} \geq 0 \quad \text{en } B(e') \implies u^{e'} > 0 \quad \text{en } B(e')$$



# El método del plano rotante

Sea  $u$  una solución de

$$-\Delta u = f(|x|, u) \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \text{ o } \partial_\nu u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Si

(H) existe  $e \in S$  tal que  $u^e > 0$  en  $B(e)$ ,

entonces  $u$  es simétrica foliada de Schwarz.

La hipótesis (H) se puede obtener como consecuencia de (no ser radial y):

- Ser la solución de **energía mínima** (Smets, Willem 2003).
- Tener un **índice de Morse**  $\leq N = \dim(\Omega)$  (Pacella, Weth, 2007).

# El método del plano rotante

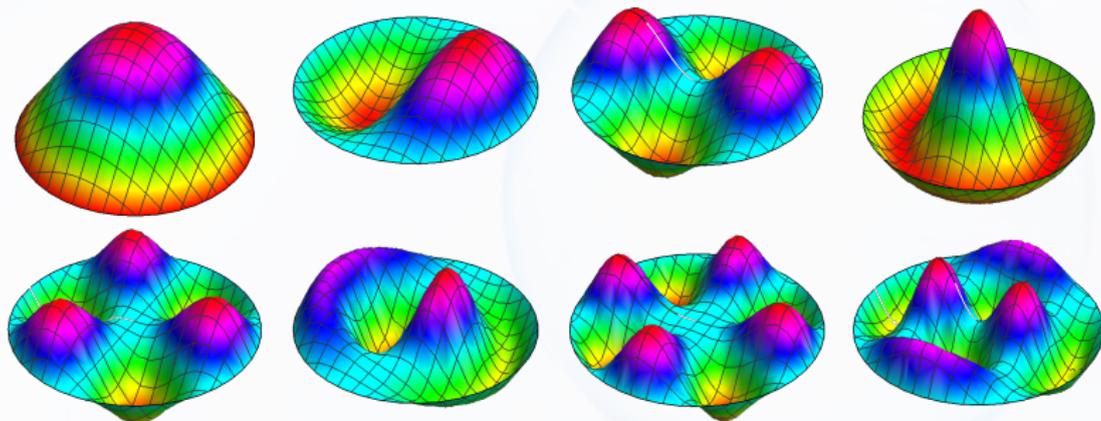
Sea  $u$  una solución de

$$-\Delta u = f(|x|, u) \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \text{ o } \partial_\nu u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Si

(H) existe  $e \in S$  tal que  $u^e > 0$  en  $B(e)$ ,

entonces  $u$  es simétrica foliada de Schwarz.



# Ecuaciones de reacción-difusión



# Ecuaciones parabólicas

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, |x|, u) & \text{en } B \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in B. \end{cases}$$

Algunas observaciones:

- Si  $u_0 = u_0 \circ \sigma_e$ , entonces  $u(x, t) = u(\sigma_e(x), t) \forall (x, t) \in B \times (0, \infty)$ .

Prueba: Sea  $u^e(x, t) = u(x, t) - u(\sigma_e(x), t)$ , entonces

$$\begin{cases} u_t^e - \Delta u^e = c(x)u^e & \text{en } B(e) \times (0, \infty), \\ u^e = 0 & \text{sobre } \partial B(e) \times (0, \infty), \\ u^e(x, 0) = 0 & \text{para } x \in B(e), \end{cases}$$

y, por el principio del máximo,  $u^e \equiv 0$  en  $B(e) \times (0, \infty)$ .

# Ecuaciones parabólicas

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, |x|, u) & \text{en } B \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in B. \end{cases}$$

Algunas observaciones:

- Si  $u_0 = u_0 \circ \sigma_e$ , entonces  $u(x, t) = u(\sigma_e(x), t) \forall (x, t) \in B \times (0, \infty)$ .
- Si  $u_0$  es radial, entonces  $u$  es radial en  $B \times (0, \infty)$ .
- Si  $u_0$  **no** es radial, entonces  $u(\cdot, t)$  no es radial para **ningún**  $t > 0$ .

El conjunto omega límite

$$\omega(u) = \{z \in C(\overline{\Omega}) : \|u(\cdot, t_k) - z\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ para alguna } t_k \rightarrow \infty\}.$$

# Soluciones positivas en la bola

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, |x|, u) & \text{en } B \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0 & \text{para } x \in B. \end{cases}$$

(U0)  $u$  es una solución clásica y  $|u(x, t)| < M$  para todo  $x \in B$  y  $t > 0$ .

(U1)  $u$  es **uniformemente equicontinua**, es decir,

$$\frac{|u(x, t) - u(y, s)|}{|x - y|^\alpha + |t - s|^{\frac{\alpha}{2}}} < C \quad \forall x, y \in B, t, s \in [a, a + 1], a > 0, x \neq y, t \neq s.$$

(f1)  $f$  es continua y **Lipschitz** en  $u$ .

(f2)  $f(t, r, u)$  es **decreciente** en  $r$ .

# Soluciones positivas en la bola

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, |x|, u) & \text{en } B \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0 & \text{para } x \in B. \end{cases}$$

Si  $u$  satisface (U0), (U1), (f1) y (f2), entonces (Polacik, 2007)  $u$  es **asintóticamente simétrica**, es decir, el conjunto **omega límite**

$$\omega(u) = \{z \in C(\overline{B}) : \|u(\cdot, t_k) - z\|_{L^\infty(B)} \rightarrow 0 \text{ para alguna } t_k \rightarrow \infty\}$$

es no vacío y sólo consiste de elementos radialmente simétricos y decrecientes en la variable radial.

La solución  $u(x, t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

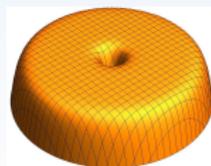
# Generalizaciones y limitaciones

- + Ecuaciones totalmente no lineales:  $u_t - F(t, |x|, u, \nabla u, D^2 u) = 0$ .
- + Cilindros parabólicos  $\Omega \times (0, \infty)$  donde  $\Omega$  es convexo en una dirección.

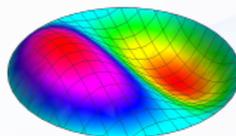


# Generalizaciones y limitaciones

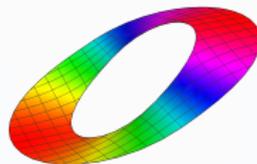
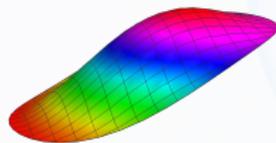
- El dominio debe ser simplemente conexo.



- La solución debe ser positiva.

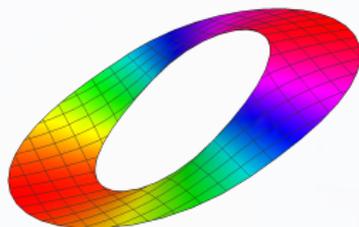
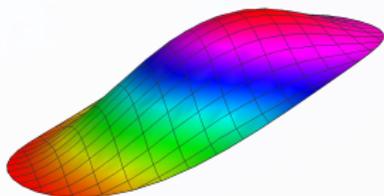
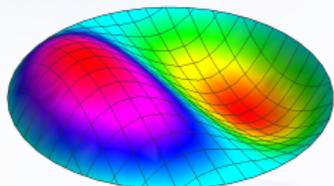
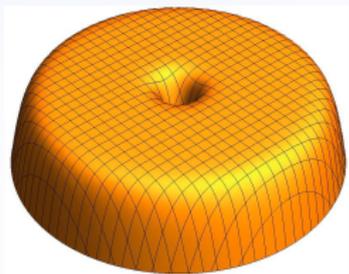


- Se necesitan condiciones de frontera de Dirichlet.



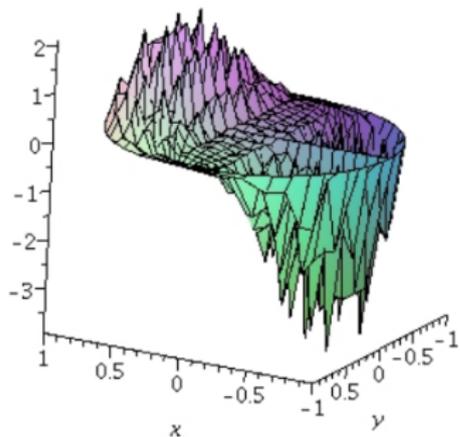
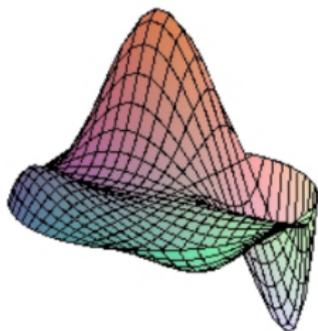
- El mapeo  $s \mapsto F(s, a, p, q)$  debe ser monótono decreciente para  $s > 0$ .

En estos casos, ¿se puede rescatar algo de simetría?



$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, |x|, u) & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 \text{ o } \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in \Omega. \end{cases}$$

Si  $\Omega$  es una bola o un anillo y  $u$  satisface (U0), (U1), (f1), (f2) y (U2) existe  $e \in S$  tal que  $u_0 \geq u_0 \circ \sigma_e$  y  $u_0 \not\equiv u_0 \circ \sigma_e$  en  $\Omega(e)$ ,



$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, |x|, u) & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 \text{ o } \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in \Omega. \end{cases}$$

Si  $\Omega$  es una bola o un anillo y  $u$  satisface (U0), (U1), (U2), (f1) y (f2), entonces (S., Weth, 2012)  $u$  es **asintóticamente simétrica foliada de Schwarz**, es decir, el conjunto **omega límite**

$$\omega(u) = \{z \in C(\overline{\Omega}) : \|u(\cdot, t_k) - z\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ para alguna } t_k \rightarrow \infty\}$$

es no vacío y sólo consiste de funciones s.f.S.

# Un modelo para la competencia, cooperación, o depredación

$$\partial_t u - \Delta u = a u - u^2 + \alpha u v$$

$$\partial_t v - \Delta v = b v - v^2 + \beta u v$$



$$\alpha > 0, \beta > 0$$



$$\alpha < 0, \beta < 0$$



$$\alpha > 0, \beta < 0$$

# Comportamiento asintótico

$$\begin{aligned}\partial_t u - \Delta u &= a u - u^2 + \alpha u v, \\ \partial_t v - \Delta v &= b v - v^2 + \beta u v.\end{aligned}$$

Cuando  $t \rightarrow \infty$  existen dos posibilidades:

✓ **Extinción:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0.$$

✓ **Coexistencia:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) > 0.$$

En cada caso, ¿qué se puede decir sobre la forma asintótica de las densidades de población?

# Forma asintótica

¿Qué se puede decir sobre la forma asintótica de las densidades de población?

Extinción:

$$\text{Si } \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0,$$

entonces  $u$  es asintóticamente radialmente simétrica.

La densidad de población  $u(x, t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

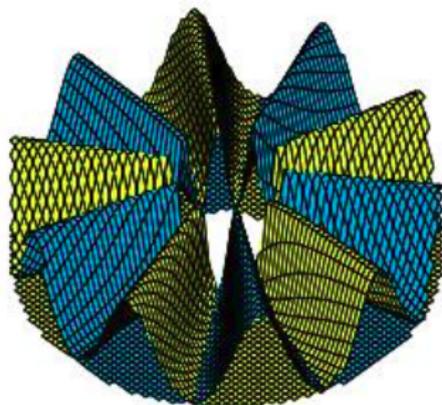
# Forma asintótica

$$\begin{aligned}\partial_t u - \Delta u &= a(t) u - u^2 + \alpha u v, \\ \partial_t v - \Delta v &= b(t) v - v^2 + \beta u v.\end{aligned}$$

Coexistencia:

$$\text{Si } \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) > 0,$$

entonces... no siempre se tiene simetría (S., Weth, 2015)



# Sistemas competitivos

Sea  $B \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , una **bola** o un **anillo**, y sea  $u$  solución de

$$\begin{aligned}(u_1)_t - \Delta u_1 &= u_1 - u_1^2 - u_1 u_2 && \text{en } B \times (0, \infty), \\(u_2)_t - \Delta u_2 &= u_2 - u_2^2 - u_1 u_2 && \text{en } B \times (0, \infty), \\u_1 = u_2 = 0 \text{ o } \partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2 = 0 &&& \text{sobre } \partial B \times (0, \infty), \\u_1(x, 0) = u_{0,1}(x) \geq 0, \quad u_2(x, 0) = u_{0,2}(x) \geq 0 &&& \text{for } x \in B.\end{aligned}$$

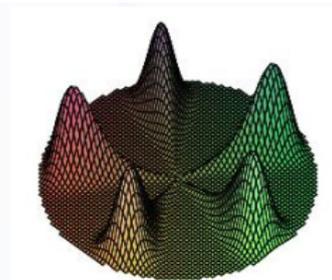
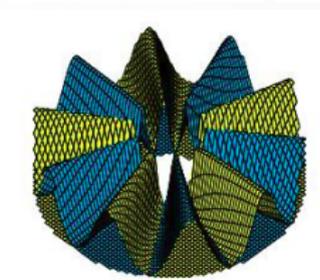
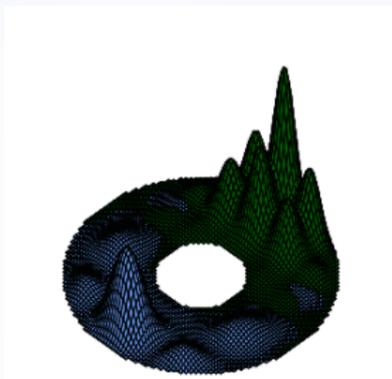
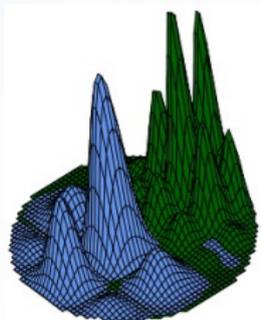
(U0) Existe  $e \in S$  tal que

$$u_{0,1} \geq u_{0,1} \circ \sigma_e, \quad u_{0,2} \leq u_{0,2} \circ \sigma_e, \quad u_{0,1} \not\equiv u_{0,1} \circ \sigma_e, \quad u_{0,2} \not\equiv u_{0,2} \circ \sigma_e,$$

# Hipótesis en el perfil inicial

(U0) Existe  $e \in S$  tal que

$$u_{0,1} \geq u_{0,1} \circ \sigma_e, \quad u_{0,2} \leq u_{0,2} \circ \sigma_e, \quad u_{0,1} \neq u_{0,1} \circ \sigma_e, \quad u_{0,2} \neq u_{0,2} \circ \sigma_e,$$



## Teorema (S., Weth, 2015; S., 2016)

Si  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones **positivas** y **acotadas** del sistema competitivo y se satisface (S0), entonces  $u_1$  y  $u_2$  son **asintóticamente simétricas foliadas de Schwarz respecto al mismo eje de simetría pero en puntos antipodales**.

# Otros problemas con competición

Los resultados previos se extienden a estos problemas.

**No linealidades más generales:**

$$(u_1)_t - \mu(|x|, t)\Delta u_1 = f_1(t, |x|, u_1) - \alpha_1(|x|, t)u_1u_2,$$

$$(u_2)_t - \mu(|x|, t)\Delta u_2 = f_2(t, |x|, u_2) - \alpha_2(|x|, t)u_1u_2,$$

**Sistemas cúbicos:**

$$(u_1)_t - \Delta u_1 = \lambda_1 u_1 + \gamma_1 u_1^3 - \alpha_1 u_1 u_2^2,$$

$$(u_2)_t - \Delta u_2 = \lambda_1 u_2 + \gamma_1 u_2^3 - \alpha_2 u_1^2 u_2,$$

# Sistemas cooperativos (S., Weth, 2014; S., 2016)

Sean  $u_1$  y  $u_2$  soluciones **acotadas** y **positivas** de

$$(u_1)_t - \Delta u_1 = a_1(t)u_1 - b_1(t)u_1^2 + \alpha_1(t)u_1u_2 \quad \text{in } B \times (0, \infty),$$

$$(u_2)_t - \Delta u_2 = a_2(t)u_2 - b_2(t)u_2^2 + \alpha_2(t)u_1u_2 \quad \text{in } B \times (0, \infty),$$

con condiciones de Neumann o Dirichlet y

$(U0)$  existe  $e \in S$  tal que

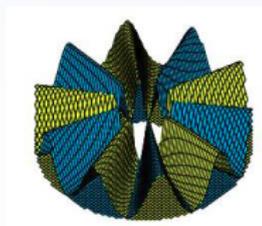
$$u_{0,1} \geq u_{0,1} \circ \sigma_e, \quad u_{0,2} \geq u_{0,2} \circ \sigma_e, \quad u_{0,1} \not\equiv u_{0,1} \circ \sigma_e, \quad u_{0,2} \not\equiv u_{0,2} \circ \sigma_e,$$

entonces  $u_1$  y  $u_2$  son **asintóticamente simétricas foliadas de Schwarz**.

Este resultado se extiende a sistemas cooperativos de **n ecuaciones** y también a soluciones que **cambian de signo**.

# Algunos problemas abiertos

- ¿Se puede caracterizar alguna simetría para sistemas competitivos con **más de dos especies**?



- ¿Se puede caracterizar alguna simetría en sistemas de tipo **depredador-presa**?

$$\partial_t u - \Delta u = u - u^2 + u v$$

$$\partial_t v - \Delta v = v - v^2 - u v$$

- En **dominios no acotados**, como  $\mathbb{R}^N$  o  $\mathbb{R}^N \setminus B$  sólo existen algunos resultados parciales (Polacik, 2005; Földes, S., 2020), pero aún se necesita mucho estudio para entender bien este caso.



¡Muchas Gracias!

*We take comfort in the symmetries we find in life  
because they suggest a design where there is none.  
—Nicole Krauss*