Un vistazo a las ecuaciones diferenciales parciales.

Alberto Saldaña.

Seminario interdisciplinario de la Facultad de Ciencias, UAEMéx.

Viernes 11 de Octubre, 2019.

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) son uno de los objetos matemáticos más exitosos para modelar fenómenos del mundo real.

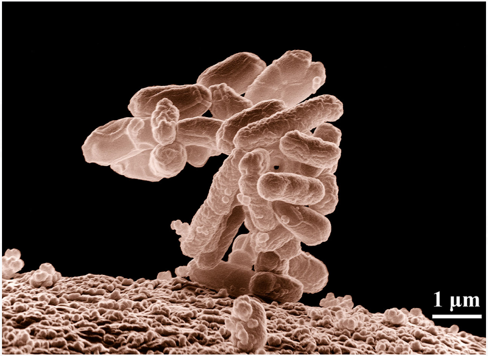
Las EDPs capturan la esencia del

cambio,

ya sea físico, químico, biológico, social,

¡o cualquier otra cosa!

Existen modelos para dinámicas de población...



$$\partial_t u - \Delta u = \lambda u - u^2$$

...para difusión del calor...

$$\partial_t \phi - \Delta \phi = f(\phi, t)$$

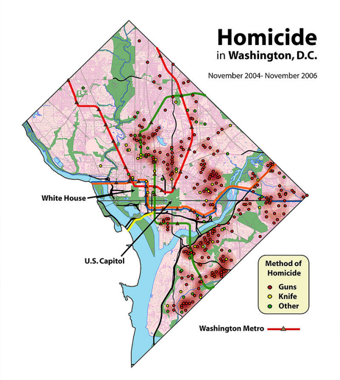
...para burbujas de jabón...

$$\Delta p = \gamma \frac{2}{R}$$

...para movimiento celular...

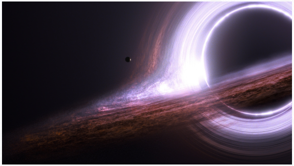
$$\partial_t u = \nabla(D_1 \nabla u - \chi u \nabla v) + f$$
$$\partial_t v = D_2 \Delta v + g - h$$

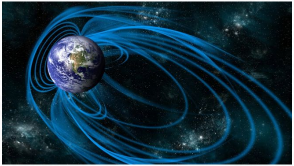
...conglomerados de crimen...

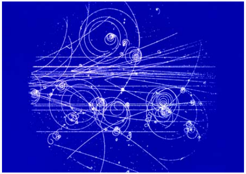


$$\partial_t s = \Delta s(x,t) - s(x,t) + s_b(x) + (\rho(x) - c(x,t))u(x,t)$$

... ¡y existen muchos otros modelos!







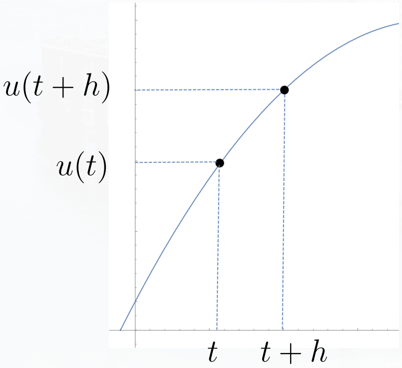
"El propósito de los modelos [matemáticos] no es ajustarse a los datos sino afinar las preguntas."

—Samuel Karlin.

Para obtener una intuición al respecto, repasemos las bases

La derivada de una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$u'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{(t+h) - t} = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}.$$



La derivada $u'(t)$ contiene la siguiente información:

- ✓ La tasa (instantánea) de cambio de u en el punto t.
- ✓ Si u es creciente ($u'(t) > 0$) o decreciente ($u'(t) < 0$).

Las derivadas se pueden usar para traducir en un lenguaje matemático las leyes o principios esenciales de un cierto fenómeno.

Por ejemplo, el principio

"*el número de nuevas bacterias por unidad de tiempo es proporcional al de la población actual*"

se puede escribir como

$$\begin{aligned} u'(t) &= a\,u(t) \qquad \text{para } t > 0, \\ u(0) &= b, \end{aligned}$$

donde

✓ $u(t)$: densidad de población al tiempo t.

✓ $a > 0$: tasa de reproducción.

✓ $b > 0$: cantidad inicial de bacterias.

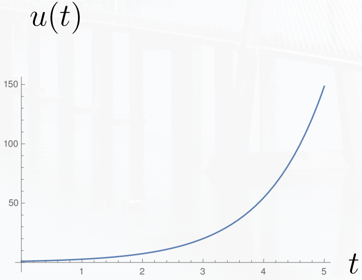
Por ejemplo, las cianobacterias...

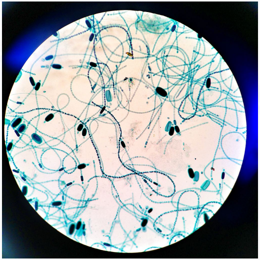
La ecuación (con condición inicial)

$$u'(t) = a\ u(t) \quad \text{para } t > 0,$$
$$u(0) = b$$

tiene la solución $u(t) = be^{at}$, es decir:

las bacterias crecen exponencialmente rápido (al menos al inicio).





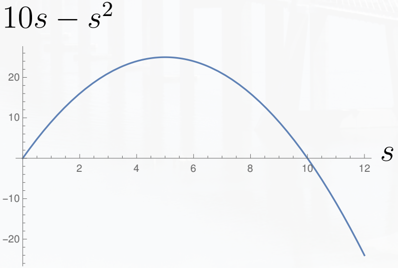
¡Las cianobacterias pueden duplicar su población cuatro veces al día!

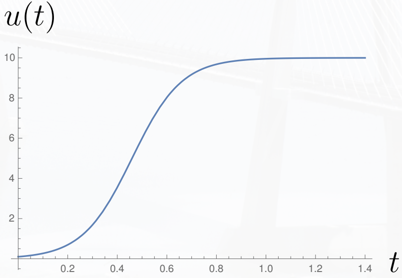
Sin embargo...

el crecimiento exponencial no puede continuar indefinidamente (por cuestiones de espacio, falta de nutrientes, deshechos,...). Por lo tanto, podríamos incluir un término de concentración:

$$
\begin{aligned}
&u'(t) = a\, u(t) - u(t)^2 \qquad \text{para } t > 0,\\
&u(0) = b.
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, si $a = 10$ y $b = 0.1$,

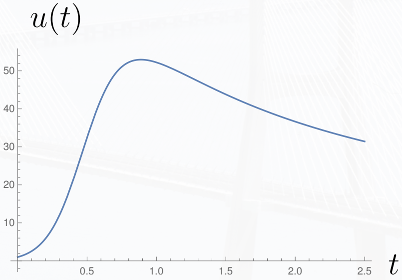




Y si los nutrientes decrecieran con el tiempo...

El consumo de nutrientes (finitos) puede traducirse como una tasa de reproducción dependiente del tiempo:

$$u'(t) = \frac{a}{(1+t)}\, u(t) - u(t)^2,$$
$$u(0) = b.$$



Modelar bacterias está muy bien pero...
¿pueden las ecuaciones diferenciales modelar amor y romance?

El modelo de Romeo y Julieta

Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned} r'(t) &= a\, r(t) + b\, j(t), \\ j'(t) &= c\, r(t) + d\, j(t), \\ r(0) &= e, \quad j(0) = f. \end{aligned}$$

- ✓ $r(t)$: El amor (o incomodidad si es negativo) de Romeo por Julieta al tiempo t.
- ✓ $j(t)$: El amor (o incomodidad) de Julieta por Romeo al tiempo t.

El modelo de Romeo y Julieta

$$
\begin{aligned}
r'(t) &= a\, r(t) + b\, j(t),\\
j'(t) &= c\, r(t) + d\, j(t),\\
r(0) &= e, \quad j(0) = f.
\end{aligned}
$$

Los parámetros a y b especifican el estilo romántico de Romeo:

- ✓ $a > 0$ & $b \geq 0$: *Amante impaciente.*
- ✓ $a > 0$ & $b \leq 0$: *Narcisista.*
- ✓ $a \leq 0$ & $b > 0$: *Precavido o inseguro.*
- ✓ $a \leq 0$ & $b \leq 0$: *Hermitaño.*

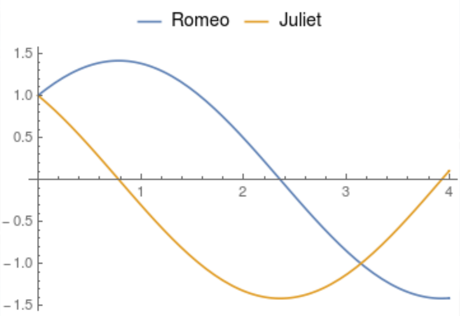
Similarmente, c y d especifican el estilo romántico de Julieta, mientras que e y f describen el interés inicial por cada uno al tiempo $t = 0$.

Un primer ejemplo

$$r'(t) = j(t), \qquad j'(t) = -r(t),$$
$$r(0) = 1, \qquad j(0) = 1.$$

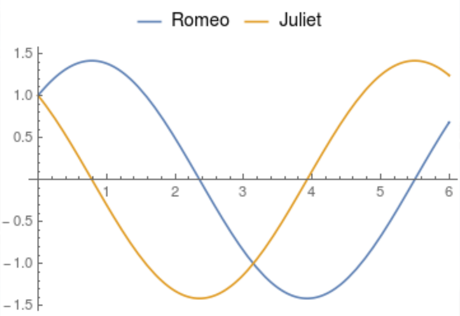
Un primer ejemplo

$$r'(t) = j(t), \qquad j'(t) = -r(t),$$
$$r(0) = 1, \qquad j(0) = 1.$$



Un primer ejemplo

$$r'(t) = j(t), \qquad j'(t) = -r(t),$$
$$r(0) = 1, \qquad j(0) = 1.$$



Un primer ejemplo

$$r'(t) = j(t), \qquad j'(t) = -r(t),$$
$$r(0) = 1, \qquad j(0) = 1.$$

Un término de concentración (no lineal)

La función

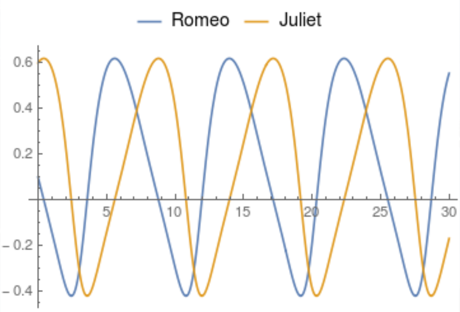
$$s \mapsto s(1-s) = s - s^2$$

también es conocida como la “no linealidad de reparación”.

$$r'(t) = j(t)(1-j(t)), \qquad j'(t) = r(t)(1-r(t)),$$
$$r(0) = 0.1, \qquad j(0) = 0.6$$

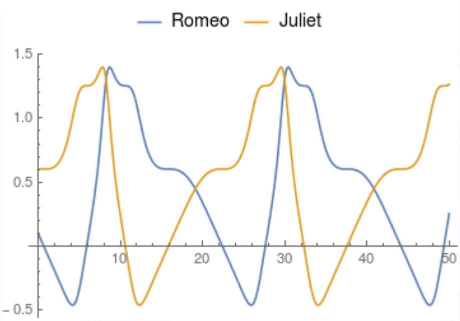
Un término de concentración (no lineal)

$$r'(t) = j(t)(j(t) - 1), \qquad j'(t) = r(t)(1 - r(t)),$$
$$r(0) = 0.1, \qquad j(0) = 0.6$$

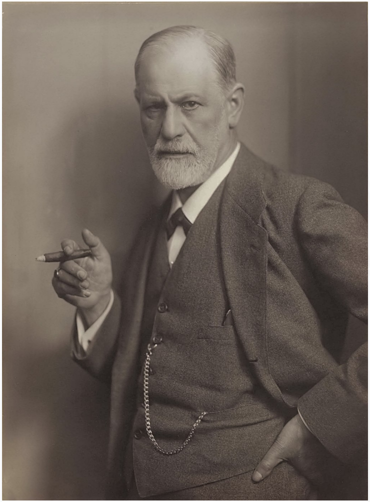


Un término de concentración (no lineal)

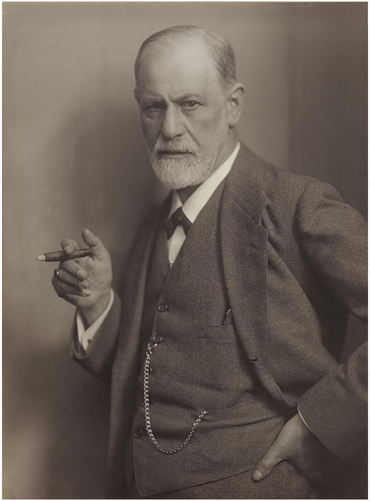
$$r'(t) = j(t)^2 (j(t) - 1), \qquad j'(t) = r(t)^2 (1 - r(t)),$$
$$r(0) = 0.1, \qquad j(0) = 0.6$$



¿Quizá un poco de ayuda profesional?



¿Quizá un poco de ayuda profesional?

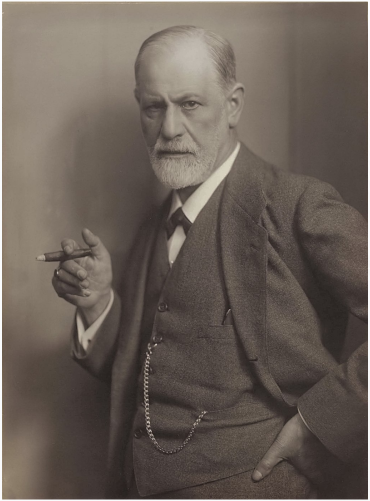


A Romeo:

- ✓ Ten cuidado con tus sentimientos.
- ✓ En relación a Julieta: ámala cuando ella se esmere por ti, y muéstrale un poco de incomodidad si ella no está lo suficientemente animada.

$$r'(t) = -2r(t) + 2j(t)(j(t) - 1)$$

¿Quizá un poco de ayuda profesional?



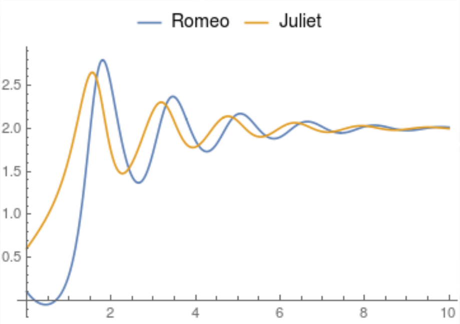
A Julieta:

- ✓ No limites tus emociones, sé feliz de estar enamorada.
- ✓ Acerca de Romeo: muéstrale que lo quieres si no lo ves muy animado, pero no tengas miedo de pedir tu espacio si te sientes saturada.

$$j'(t) = j(t) + r(t)(1 - r(t))$$

Un equilibrio feliz

$$r'(t) = -2j(t) + 2j(t)(j(t) - 1), \quad j'(t) = j(t) + r(t)(r(t) - 1),$$
$$r(0) = 0.1, \quad j(0) = 0.6$$



Ahora que ya sabemos leer ecuaciones diferenciales...

Un modelo sobre el funcionamiento de la democracia

$$
\begin{aligned}
G'(t) &= 1 - G(t), \\
S'(t) &= G(t)S(t)(1 - S(t)), \\
D'(t) &= \Big(S(t)(S(t) - D(t)) - D(t)\Big)(1 - D(t)).
\end{aligned}
$$

- ✓ G: Producto interno bruto per capita.
- ✓ D: Democracia.
- ✓ S: Valores de autoexpresión (tolerancia social, satisfacción con el estilo de vida, libertad de expresión, sensación de libertad).

OPEN ACCESS Freely available online PLOS | ONE

The Dynamics of Democracy, Development and Cultural Values

Viktoria Spaiser[1]*, Shyam Ranganathan[2], Richard P. Mann[1,2], David J. T. Sumpter[1,2]

1 Institute for Futures Studies, Stockholm, Sweden, 2 Department of Mathematics, Uppsala University, Uppsala, Sweden

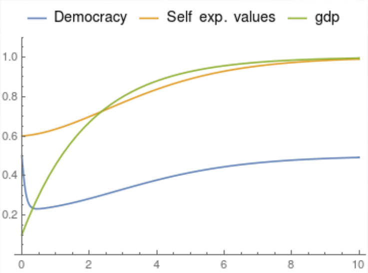
Abstract

Over the past decades many countries have experienced rapid changes in their economies, their democratic institutions and the values of their citizens. Comprehensive data measuring these changes across very different countries has recently become openly available. Between country similarities suggest common underlying dynamics in how countries develop in terms of economy, democracy and cultural values. We apply a novel Bayesian dynamical systems approach to identify the model which best captures the complex, mainly non-linear dynamics that underlie these changes. We show that the level of Human Development Index (HDI) in a country drives first democracy and then higher emancipation of citizens. This change occurs once the countries pass a certain threshold in HDI. The data also suggests that there is a limit to the growth of wealth, set by higher emancipation. Having reached a high level of democracy and emancipation, societies tend towards equilibrium that does not support further economic growth. Our findings give strong empirical evidence against a popular political science theory, known as the Human Development Sequence. Contrary to this theory, we find that implementation of human-rights and democratisation precede increases in emancipative values.

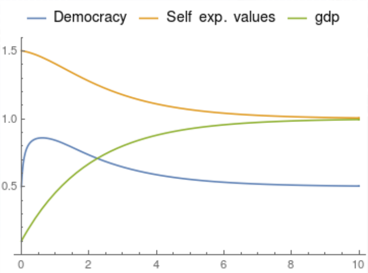
Un modelo sobre el funcionamiento de la democracia

$$G'(t) = 1 - G(t),$$
$$S'(t) = G(t)S(t)(1 - S(t)),$$
$$D'(t) = \Big(S(t)(S(t) - D(t)) - D(t)\Big)(1 - D(t)).$$

- ✓ $S(t) - D(t)$: S es un límite para D.
- ✓ $-D(t)$: D no se refuerza a sí misma.
- ✓ $(1 - D(t))$: Concentración.



$G[0] = 0.1,\ D[0] = 0.5,\ S[0] = 0.6$



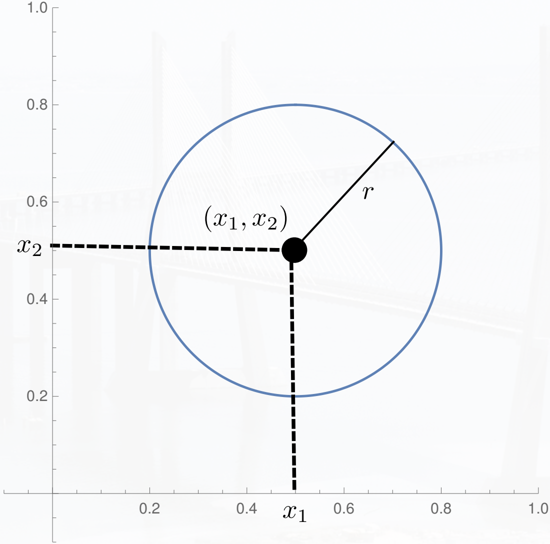
$G[0] = 0.1,\ D[0] = 0.5,\ S[0] = 1.5$

Estamos listos para introducir una nueva dimensión...

... y un orden superior...

Variables espaciales en dos dimensiones

Denotemos por $S_r(x)$ al círculo de radio r centrado en $x = (x_1, x_2)$, es decir,



El laplaciano en dos dimensiones

El laplaciano es

$$\Delta u(x_1, x_2, t) = \partial_{x_1,x_1} u(x_1, x_2, t) + \partial_{x_2,x_2} u(x_1, x_2, t),$$

donde

$$\partial_{x_1} u(x_1, x_2, t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x_1 + h, x_2, t) - u(x_1, x_2, t)}{h}$$

y

$$\partial_{x_1,x_1} u(x_1, x_2, t) = \lim_{h \to 0} \frac{\partial_{x_1} u(x_1 + h, x_2, t) - \partial_{x_1} u(x_1, x_2, t)}{h}.$$

La propiedad definitoria del laplaciano

Las propiedades del valor medio:

$$\Delta u(x,t) > 0 \quad \Longrightarrow \quad u(x,t) < \fint_{S_r(x)} u(s,t)\, ds.$$

Si el laplaciano de u es positivo en x, entonces los valores de u alrededor de x están, en promedio, por arriba de $u(x,t)$.

$$\Delta u(x,t) < 0 \quad \Longrightarrow \quad u(x,t) > \fint_{S_r(x)} u(s,t)\, ds.$$

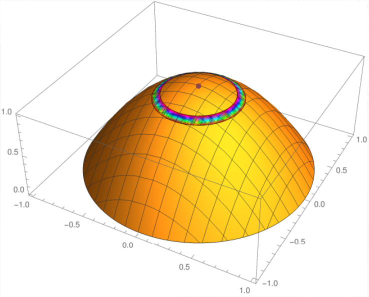
Si el laplaciano de u es negativo en x, entonces los valores de u alrededor de x están, en promedio, por debajo de $u(x,t)$.

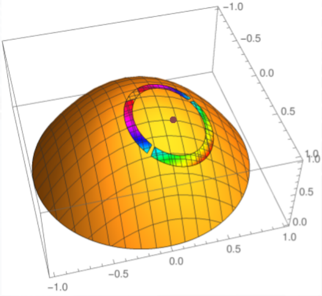
Por ejemplo

Si $u(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 1$, entonces

$$\Delta u(x_1, x_2) = -4 < 0 \quad \text{para todo } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

entonces para cada x, los valores de u alrededor de x están en promedio por *debajo* de $u(x)$.





La función $u(x_1, x_2)$

El principio de la difusión del calor:

"Cuando un objeto está a una temperatura distinta a la de su entorno, el calor fluye de modo que el objeto y su entorno alcancen la misma temperatura"

“Cuando un objeto está a una temperatura distinta a la de su entorno, el calor fluye de modo que el objeto y su entorno alcancen la misma temperatura”

Denotemos por $u(x,t)$ a la temperatura en el punto x al tiempo t.

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0, \\ u(x,0) &= b(x). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) < 0 \quad \iff \quad u(x,t) > \fint_{\partial B_r(x)} u(s,t)\, ds.$$

La temperatura alrededor de x está (en promedio) por debajo de la temperatura en x al tiempo t, por lo tanto, la temperatura en x disminuirá.

La ecuación del calor

"Cuando un objeto está a una temperatura distinta a la de su entorno, el calor fluye de modo que el objeto y su entorno alcancen la misma temperatura"

Denotemos por $u(x,t)$ a la temperatura en el punto x al tiempo t.

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0, \\ u(x,0) &= b(x). \end{aligned}$$

Observemos que

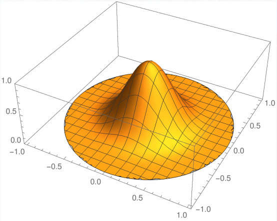
$$\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u(x,t) < \fint_{\partial B_r(x)} u(s,t)\, ds.$$

La temperatura alrededor de x está (en promedio) por arriba que la temperatura en x al tiempo t, por lo tanto la temperatura en x aumentará.

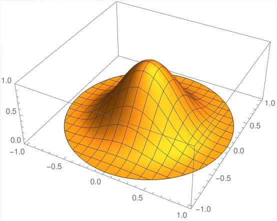
Una nueva perspectiva sobre las dinámicas de población...

El crecimiento de una población con movimiento/difusión se modela con

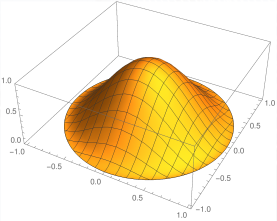
$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = a\, u(x,t) \; - \; u(x,t)^2$$



$u(x,0)$



$u(x,1)$

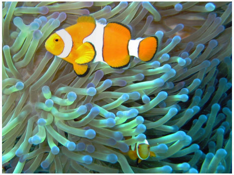


$u(x,2)$

$u(x,t)$ es la densidad de población al tiempo t y en el punto $x \in B$.

Un modelo para la competencia, cooperación, o predación

$$\partial_t u - \Delta u = a\ u \ -\ u^2 + \alpha\ u\ v$$
$$\partial_t v - \Delta v = b\ v \ -\ v^2 + \beta\ u\ v$$



$\alpha > 0,\ \beta > 0$

$\alpha < 0,\ \beta < 0$

$\alpha > 0,\ \beta < 0$

Comportamiento asintótico

$$\partial_t u - \Delta u = a\ u\ -\ u^2 + \alpha\ u\ v,$$
$$\partial_t v - \Delta v = b\ v\ -\ v^2 + \beta\ u\ v.$$

Cuando $t \to \infty$ existen dos posibilidades:

✓ Extinción:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0.$$

✓ Coexistencia:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} v(x,t) > 0.$$

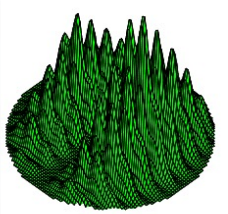
En cada caso, ¿qué se puede decir sobre la forma asintótica de las densidades de población?

¿Qué se puede decir sobre la forma asintótica de las densidades de población?

Extinción:

$$\text{Si} \quad \lim_{t\to\infty} u(x,t) > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0,$$

entonces u es asintóticamente radialmente simétrica.



La densidad de población $u(x,t)$ cuando $t \to \infty$.

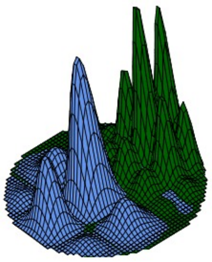
Forma asintótica

$$\partial_t u - \Delta u = a(t)\ u\ \ -\ \ u^2 + \alpha\ u\ v,$$
$$\partial_t v - \Delta v = b(t)\ v\ \ -\ \ v^2 + \beta\ u\ v.$$

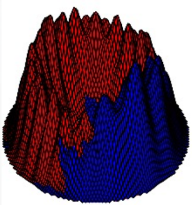
Coexistencia:

$$\text{If} \quad \lim_{t\to\infty} u(x,t) > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} v(x,t) > 0,$$

entonces...



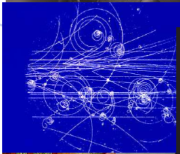
Si $\alpha < 0$ y $\beta < 0$.



Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

¿?

Si $\alpha > 0$ y $\beta < 0$.



¡Gracias por su atención!

¡Gracias por su Δtención!

La mayoría de las imágenes fueron tomadas de Wikipedia.org.
¡Apoyen al conocimiento libre!