



Instituto de Matemáticas

# The strange case of the Bilaplacian

Coloquio Octubre 8, 2019.

Alberto Saldaña

$$\int_{B_\rho} \frac{\prod_{i=1}^m y_i^{m_i}}{|y|^{N+2s}} dy = - \int_{B_\rho} \frac{\prod_{i=1}^m y_i^{m_i}}{|y|^{N+2s}} d\tilde{y}, \quad \text{i.e.} \quad \int_{B_\rho} \frac{y^\alpha}{|y|^{N+2s}} dy = 0.$$

Finally, by the multinomial theorem,

$$(-1)^m \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} \frac{m!}{\alpha!} \partial^{2\alpha} u(x) = (-1)^m \left( \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} \right)^m u(x) = (-\Delta)^m u(x).$$

change of variables, (2.12), (2.10), (2.9) and (2.11).

$$|L_{m,\rho} u(x)| = \left| \lim_{s \rightarrow m^-} L_{m,\rho} u(x) - \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \frac{m!}{\alpha!} \partial^{2\alpha} u(x) \right|$$

$$= \left| \lim_{s \rightarrow m^-} \frac{(-1)^m (2m)!}{(2\alpha)!} \lim_{s \rightarrow m^-} \frac{c_{N,m,\ell}}{2} \rho^{2m-2s} \int_{B_\rho} \frac{y^{2\alpha}}{|y|^{N+2s}} dy \right|$$

$$= \left| \partial^{2\alpha} u(x) \frac{(-1)^m (2m)!}{(2\alpha)!} \int_{B_\rho} \frac{y^{2\alpha}}{|y|^{N+2s}} dy \right|$$

$$= \left| \frac{(-1)^m (2m)!}{(\alpha)!} \int_{B_\rho} \frac{y^\alpha}{|y|^{N+2s}} dy \right|$$

$$= \left| \int_{B_\rho} \frac{R(x,y)}{|y|^{2s+N}} dy \right|$$

$$= \frac{C_1 \rho^{2m+1} m! \Gamma(\frac{N}{2})}{2 (2m)! \pi^{\frac{N}{2}}}$$

follow from Proposition 2.4.

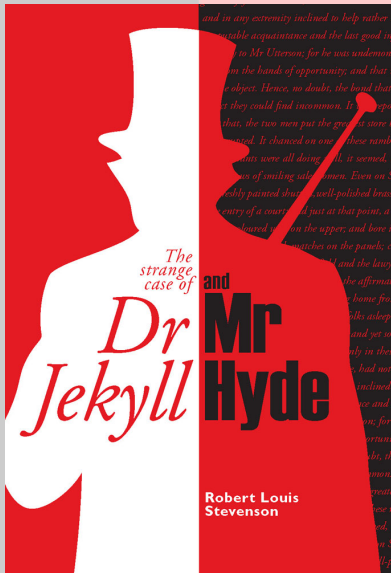
fore

$$(\Delta)^m u(x) \quad \text{for all } x \in U$$

2.4. This ends the proof.

and  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ . By Lemma





The  
strange  
case of

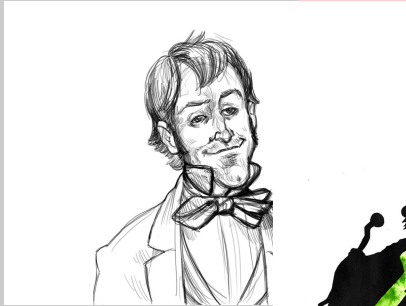
Dr  
Jekyll

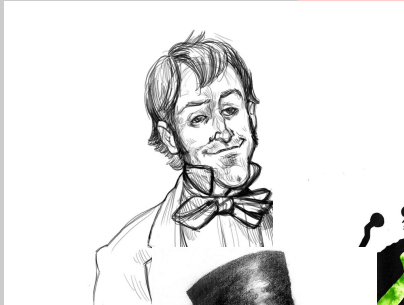
and  
Mr  
Hyde

Robert Louis  
Stevenson

and in any extremity inclined to help rather than  
to hinder, a reasonable acquaintance and the last good in  
the world to Mr Utterson; for he was undermou  
from the hands of opportunity; and that  
the object. Hence, no doubt, the bond that  
as they could find in common. It was  
that, the two men put the great store  
of it. It chanced on one of these rambl  
that they were all doing well, it seemed,  
of smiling talk to women. Even so  
of a courtly and just at that point, a  
of the lower, and here's  
of the panels, of  
and the levy  
the affirm  
home fro  
talks asle  
and yet w  
only in the  
had not  
inclined  
and  
son, for  
of the  
it  
common  
crean  
these  
ed, e  
on S  
ll-p









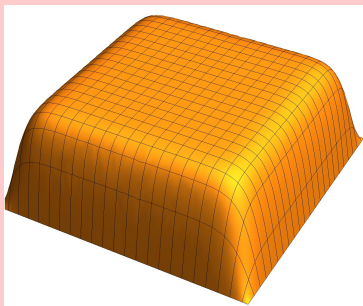
Consideremos el problema



$$\begin{cases} -\Delta u = u - u^3 & \text{en } Q := [0, 1] \times [0, 1], \\ u = 0 & \text{sobre } \partial Q. \end{cases}$$

Una solución positiva

- existe,
- es única,
- está acotada por uno,
- es estable,
- es simétrica,
- es monótona,
- alcanza su máximo en el origen.



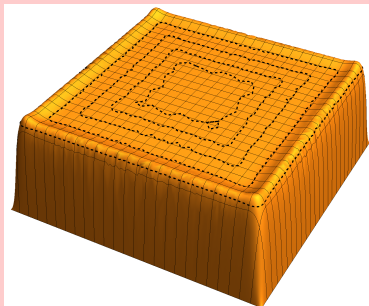
Por otro lado, consideremos el problema



$$\begin{cases} \Delta^2 u = u - u^3 & \text{en } Q := [0, 1] \times [0, 1], \\ \Delta u = u = 0 \text{ o } \partial_\nu u = u = 0 & \text{sobre } \partial Q. \end{cases}$$

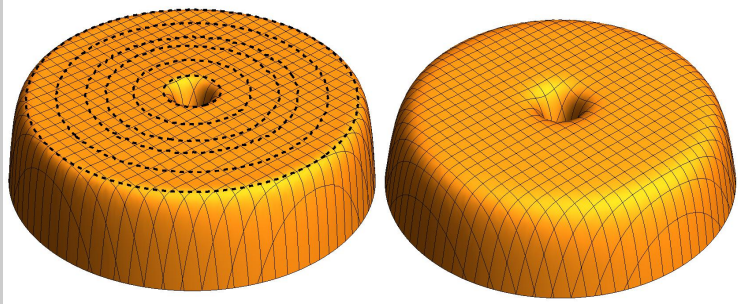
En relación a las soluciones positivas:

- se pueden aproximar numéricamente,
- la unicidad **no** está demostrada,
- **no** están acotadas por 1,
- la estabilidad **no** está demostrada,
- probablemente hay simetría, pero **no** es del todo claro debido a las oscilaciones al nivel  $\{u = 1\}$ ,
- **no** son monótonas,
- alcanzan su máximo cerca de las esquinas y **no** en el origen.

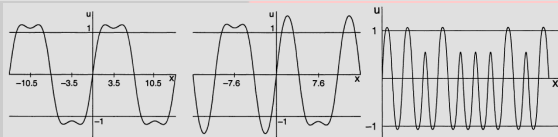
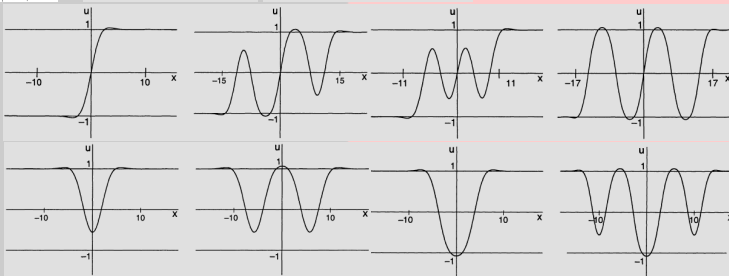
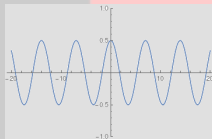
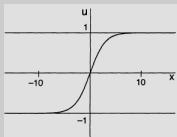
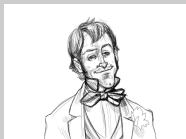




*Se puede observar un comportamiento similar en dominios anulares.*



$$-u'' = u - u^3 \quad \text{vs} \quad u'''' = u - u^3 \quad \text{en } \mathbb{R}$$




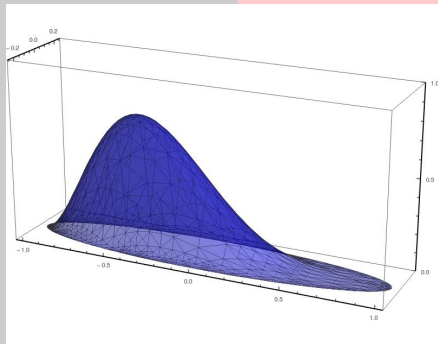
Pictures taken from: L.A. Peletier and W.C. Troy. *Spatial patterns.*

# Aún en problemas lineales existen importantes diferencias

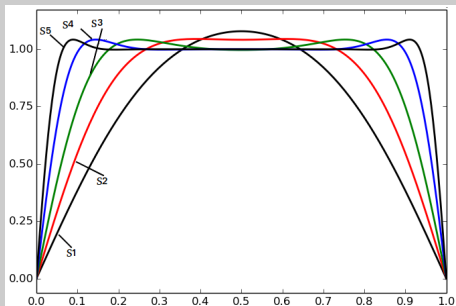


$$\begin{cases} -\Delta u = f > 0 & \text{en } E := \{x^2 + 25y^2 < 1\}, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial E. \end{cases} \implies u > 0 \text{ en } E,$$


$$\begin{cases} (-\Delta)^2 u = f > 0 & \text{en } E := \{x^2 + 25y^2 < 1\}, \\ \partial_\nu u = u = 0 & \text{sobre } \partial E. \end{cases} \implies u \text{ cambia de signo en } E.$$



# ¿Cómo sucede esta transición?



Veamos a detalle a las potencias intermedias del Laplaciano:  $(-\Delta)^s$  con  $s \in (1, 2)$ .

## Algunas preguntas fraccionarias:

- Si  $u_s$  es una solución de  $(-\Delta)^s u_s = f$  con ciertas condiciones de frontera, entonces ¿el mapeo  $s \mapsto u_s$  es continuo/diferenciable en algún sentido?
- Si  $(-\Delta)^2$  requiere de dos condiciones de frontera para tener problemas bien puestos y  $-\Delta$  sólo necesita una, ¿qué sucede con la condición extra cuando  $s \searrow 1$ ?
- ¿Las soluciones son más y más “patológicas” cuando  $s \nearrow 2$  o son esencialmente iguales para cualquier  $s > 1$ ?
- ¿La función de Green de  $(-\Delta)^s$  en una elipse  $E = \{x^2 + 25y^2 < 1\}$  cambia de signo para cualquier  $s > 1$ ?

## Evaluación punto a punto de $(-\Delta)^s$ para $s \in (1, 2)$

Sea  $N \in \mathbb{N}$ ,  $s \in (0, 2)$ , entonces

$$(-\Delta)^s u(x) := c_{N,s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+2y) - 4u(x+y) + 6u(x) - 4u(x-y) + u(x-2y)}{|y|^{N+2s}} dy.$$

Aquí  $c_{N,s} > 0$  es una constante de normalización tal que  $\mathcal{F}((-\Delta)^s u) = |\xi|^{2s} \mathcal{F}u$ .

En particular, para una función  $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  adecuada,

$$\lim_{s \nearrow 2} (-\Delta)^s u(x) = (-\Delta)^2 u(x) \quad y \quad \lim_{s \searrow 1} (-\Delta)^s u(x) = -\Delta u(x)$$

*Intuición:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(0), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2t) - 4f(t) + 6f(0) - 4f(-t) + f(-2t)}{t^4} = f''''(0)$$

# Problemas lineales no homogéneos en una bola $B := \{|x| < 1\}$

Let  $s \in (1, 2)$ ,

$$(-\Delta)^s u(x) := c_{N,s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+2y) - 4u(x+y) + 6u(x) - 4u(x-y) + u(x-2y)}{|y|^{N+2s}} dy.$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } B, \\ u = g & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } B, \\ u = h & \text{sobre } \partial B, \\ -\partial_\nu u = g & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

Notemos que:  $2-s \in (0, 1)$ ,

$$(-\Delta)^s u = f \quad \text{en } B,$$

$$u = v \quad \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus B,$$

$$\lim_{x \rightarrow z} (1 - |x|^2)^{2-s} u(x) = h(z) \quad \text{para } z \in \partial B,$$

$$\lim_{x \rightarrow z} -\partial_\nu [((1 - |x|^2)^{2-s} u(x))] = g(z) \quad \text{para } z \in \partial B.$$

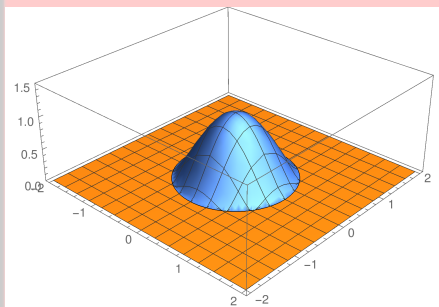
# La función de Green, $s \in (1, 2)$

$$(-\Delta)^s u = f \quad \text{en } B,$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus B,$$

$$\lim_{x \rightarrow z} (1 - |x|^2)^{2-s} u(x) = 0 \quad \text{para } z \in \partial B,$$

$$\lim_{x \rightarrow z} -\partial_\nu ((1 - |x|^2)^{2-s} u(x)) = 0 \quad \text{para } z \in \partial B.$$



La solución única es

$$u(x) = \int_B G_s(x, y) f(y) dy \quad (\text{notemos que } u > 0 \text{ si } f > 0),$$

donde (Dipierro-Grunau, 2016), (Abatangelo, Jarohs, S., 2016)

$$G_s(x, y) = k_{N,s} |x - y|^{2s-N} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)+(1-|y|^2)+|x-y|^2}{2}} \frac{t^{s-1}}{(t+1)^{\frac{N}{2}}} dt, \quad x, y \in \mathbb{R}^N, \quad x \neq y.$$



## El núcleo no-local de Poisson, $s \in (1, 2)$

$$(-\Delta)^s u = 0 \quad \text{en } B,$$

$$u = v \quad \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus B,$$

$$\lim_{x \rightarrow z} (1 - |x|^2)^{2-s} u(x) = 0 \quad \text{para } z \in \partial B,$$

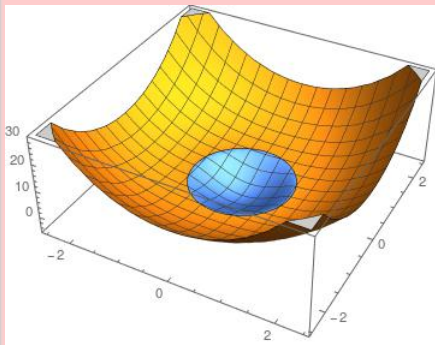
$$\lim_{x \rightarrow z} -\partial_\nu((1 - |x|^2)^{2-s} u(x)) = 0 \quad \text{para } z \in \partial B.$$

La solución única es

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B} \Gamma_s(x, y) v(y) dy$$

donde (Abatangelo, Jarohs, S. 2017)

$$\Gamma_s(x, y) = (-1) \gamma_{N,s} \frac{(1 - |x|^2)_+^s}{(|y|^2 - 1)^s |x - y|^N}$$



(notemos que  $u < 0$  si  $v > 0$ ),

para  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $y \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{B}$ .

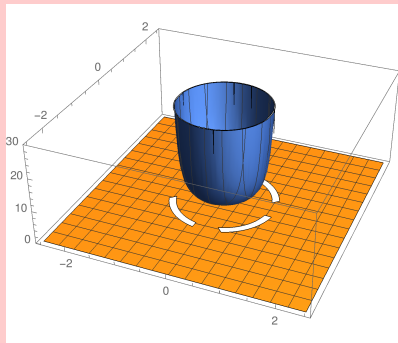
## Los núcleos de frontera de Poisson, $s \in (1, 2)$

$$(-\Delta)^s u = 0 \quad \text{en } B,$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus B,$$

$$\lim_{x \rightarrow z} (1 - |x|^2)^{2-s} u(x) = h(z) \quad \text{para } z \in \partial B,$$

$$\lim_{x \rightarrow z} -\partial_\nu ((1 - |x|^2)^{2-s} u(x)) = 0 \quad \text{para } z \in \partial B.$$



La solución única es

$$u(x) = \int_{\partial B} E_{0,s}(x,z) h(z) dz \quad (\text{notemos que } u > 0 \text{ si } h > 0 \text{ y } N \leq 4),$$

donde (Abatangelo, Jarofis, S. 2017)

$$E_{0,s}(x,z) = \frac{1}{4\omega_N} \frac{(1 - |x|^2)^s}{|x-z|^{N+2}} (N(1 - |x|^2) + (4 - N)|x-z|^2) \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^N, y \in \partial B.$$

## Los núcleos de frontera de Poisson, $s \in (1, 2)$

$$(-\Delta)^s u = 0 \quad \text{en } B,$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus B,$$

$$\lim_{x \rightarrow z} (1 - |x|^2)^{2-s} u(x) = 0 \quad \text{para } z \in \partial B,$$

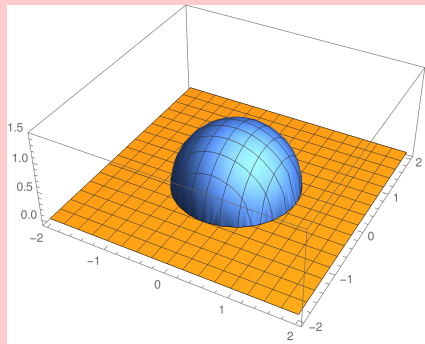
$$\lim_{x \rightarrow z} -\partial_\nu((1 - |x|^2)^{2-s} u(x)) = g(z) \quad \text{para } z \in \partial B.$$

La solución única es

$$u(x) = \int_{\partial B} E_{1,s}(x,z) g(z) dz$$

donde (Abatangelo, Jarohs, S. 2017)

$$E_{1,s}(x,z) = \frac{1}{\omega_N} \frac{(1 - |x|^2)^s}{|x-z|^N}$$



(notemos que  $u > 0$  si  $g > 0$ ),

para  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $y \in \partial B$ .

## *Algunos resultados previos*

$s \in \mathbb{N}$ :

*Funciones de Green: Green (1828), Boggio (1905).*

*Núcleos de Poisson: Poisson (1820), Lauricella-Volterra (1896), Edenhofer (1974).*

$s \in (0, 1)$ :

*Funciones de Green: Blumental-Gettoor-Ray (1961).*

*Núcleo no-local de Poisson: Riesz (1937).*

*Núcleo de frontera de Poisson: Bogdan (1999).*

## Aplicaciones: Formulas de representación, $s \in (1, 2)$

*Teorema (Abatangelo, Jarošs, S. 2017)*

Sea  $r > 1$  y  $u \in \mathcal{L}_s^1 \cap C^{2s+\alpha}(B)$  ( $2s + \alpha \notin \mathbb{N}$ ) tales que

$$(1 - |x|^2)^{2-s}u \in C^{1+\alpha}(\bar{B}), \quad (-\Delta)^s u \in C^\alpha(\bar{B}), \quad y \quad u = 0 \text{ en } B_r \setminus \bar{B}.$$

Entonces, para  $x \in B$ ,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_B G_s(x, y) (-\Delta)^s u(y) dy + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{B}} \Gamma_s(x, y) u(y) dy \\ &+ \int_{\partial B} E_{0,s}(x, \theta) D^{s-2} u(\theta) d\theta + \int_{\partial B} E_{1,s}(x, \theta) D^{s-1} u(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

$$D^{s-2} u(z) := \lim_{x \rightarrow z} (1 - |x|^2)^{2-s} u(x), \quad D^{s-1} u(z) := \lim_{x \rightarrow z} -\partial_\nu [(1 - |x|^2)^{2-s} u(x)]$$

$$\mathcal{L}_s^1 := \left\{ u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|}{1 + |x|^{N+2s}} dx < \infty \right\}.$$

## Aplicaciones: Caracterización de funciones $s$ -harmónicas, $s \in (1, 2)$

Una función es  $s$ -harmónica en  $B$  si  $(-\Delta)^s u = 0$  en  $B$ .

**Teorema (Abatangelo, Jarohs, S. 2017)**

Si  $u \in C^{2s+\alpha}(B)$  es  $s$ -harmónica en  $B$ ,  $(1 - |x|^2)^{2-s} u \in C^{m+\alpha}(\bar{B})$  y  $u = 0$  en  $\mathbb{R}^N \setminus \bar{B}$ , entonces

$$u(x) = \int_{\partial B} \frac{(1 - |x|^2)_+^{s-1}}{|x - \theta|^N} g_0(\theta) + \frac{(1 - |x|^2)_+^s}{|x - \theta|^N} g_1(\theta) d\theta$$

donde  $g_0, g_1 \in C(\partial B)$  son funciones determinadas de forma única. En particular,

$$(-\Delta)^s u = 0 \quad \text{en } B \quad \text{implica que} \quad (-\Delta)^{s+t} ((1 - |x|^2)^t u) = 0 \quad \text{en } B.$$

para todo  $t > 1 - s$ .

# Aplicaciones: Un Lema de Hopf fraccionario de alto orden, $s \in (1, 2)$

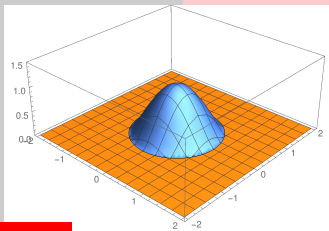
*Teorema (Abatangelo, Jarohs, S. 2017)*

Sea  $f \in C^\alpha(\bar{B}) \setminus \{0\}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  una función no negativa y sea  $u \in \mathcal{H}_0^s(B)$  la única solución débil de

$$(-\Delta)^s u = f \underset{\neq}{\geq} 0 \quad \text{en } B \quad \text{con} \quad u = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus \bar{B}.$$

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow z} \frac{u(x)}{(1 - |x|^2)^s} = m_s \int_B \frac{(1 - |y|^2)^s}{|y - z|^N} f(y) dy > 0 \quad \text{para todo } z \in \partial B.$$

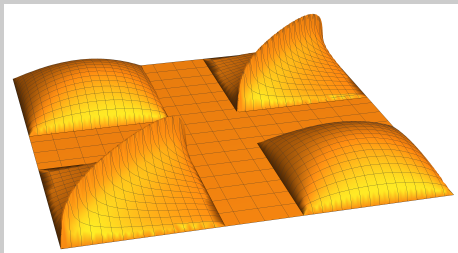


# Una función de Green que cambia de signo, $s \in (1, 2)$

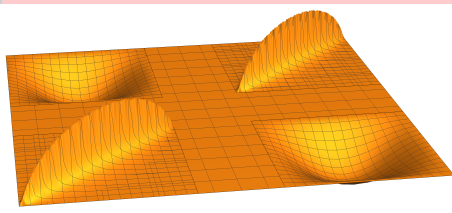
*Teorema (Abatangelo, Jarošs, S. 2017)*

Sea  $\Omega$  la unión de dos bolas abiertas disjuntas. Si  $G_{\Omega}^s$  denota la función de Green de  $(-\Delta)^s$  en  $\Omega$ , entonces  $G_{\Omega}^s$  cambia de signo.

En 1D:  $\Omega = (0, 1) \cup (2, 3)$ ,  $G_{\Omega}^s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,



para  $s \in (0, 1)$



para  $s \in (1, 2)$



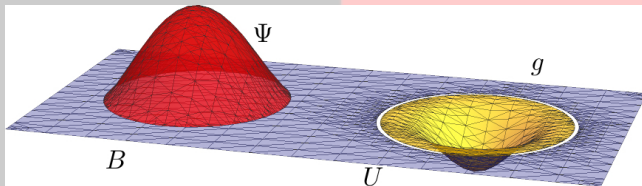
# Soluciones que cambian de signo, $s \in (1, 2)$

*Teorema (Abatangelo, Jarohs, S. 2016)*

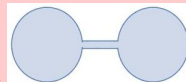
Sea  $\Omega$  la unión de dos bolas abiertas disjuntas. Existe una función positiva  $f \in C^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$  tal que la única solución de

$$(-\Delta)^s u = f \geq 0 \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \mathbb{R} \setminus \Omega, \quad D^{s-2}u = D^{s-1}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

cambia de signo en  $\Omega$ .



*Nota: Si  $N \geq 2$ , las dos bolas se pueden unir con un tubo delgado.*



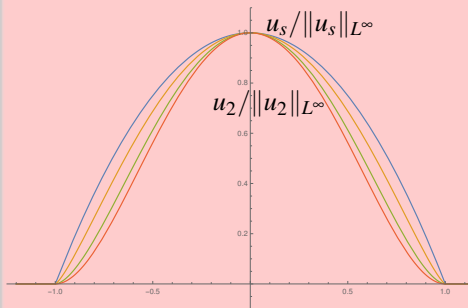
¿Qué pasa si  $s \nearrow 2$  ?

$$D^{s-2}u_s(z) := \lim_{x \rightarrow z} (1 - |x|^2)^{2-s} u_s(x),$$

$$D^{s-1}u_s(z) := \lim_{x \rightarrow z} -\partial_v [(1 - |x|^2)^{2-s} u_s(x)]$$

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_s = 1 & \text{en } B, \\ u_s = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus B, \\ D^{s-1}u_s(z) = 0 & \text{para } z \in \partial B, \\ D^{s-2}u_s(z) = 0 & \text{para } z \in \partial B. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta^2 u_2 = 1 & \text{en } B, \\ -\partial_v u_2 = 0 & \text{sobre } \partial B, \\ u_2 = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$



- La solución (normalizada)  $u_s$  aproxima a la solución (normalizada)  $u_2$  “desde arriba”.

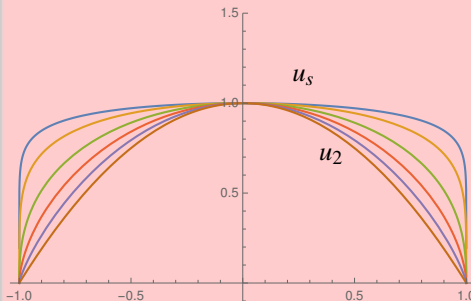
¿Qué pasa si  $s \nearrow 2$  ?

$$D^{s-2}u_s(z) := \lim_{x \rightarrow z} (1 - |x|^2)^{2-s} u_s(x),$$

$$D^{s-1}u_s(z) := \lim_{x \rightarrow z} -\partial_\nu [(1 - |x|^2)^{2-s} u_s(x)]$$

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_s = 0 & \text{en } B, \\ u_s = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus B, \\ D^{s-1}u_s(z) = 1 & \text{para } z \in \partial B, \\ D^{s-2}u_s(z) = 0 & \text{para } z \in \partial B. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta^2 u_2 = 0 & \text{en } B, \\ -\partial_\nu u_2 = 1 & \text{sobre } \partial B, \\ u_2 = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$



•  $u_s$  va uniformemente a  $u_2$  “desde arriba”.

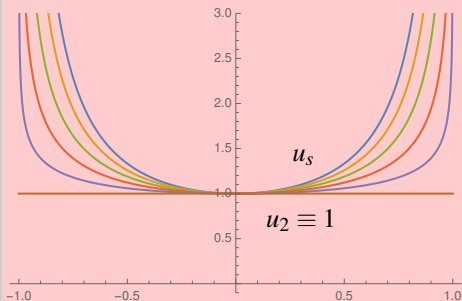
¿Qué pasa si  $s \nearrow 2$  ?

$$D^{s-2}u_s(z) := \lim_{x \rightarrow z} (1 - |x|^2)^{2-s} u_s(x),$$

$$D^{s-1}u_s(z) := \lim_{x \rightarrow z} -\partial_v [(1 - |x|^2)^{2-s} u_s(x)]$$

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_s = 0 & \text{en } B, \\ u_s = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus B, \\ D^{s-1}u_s(z) = 0 & \text{para } z \in \partial B, \\ D^{s-2}u_s(z) = 1 & \text{para } z \in \partial B. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta^2 u_2 = 0 & \text{en } B, \\ -\partial_v u_2 = 0 & \text{sobre } \partial B, \\ u_2 = 1 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$



- $u_s$  va uniformemente a 1 en subconjuntos compactos de  $(-1, 1)$  “desde arriba”.

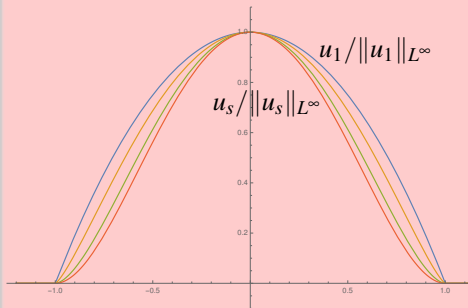
¿Qué pasa si  $s \searrow 1$  ?

$$D^{s-2}u_s(z) := \lim_{x \rightarrow z} (1 - |x|^2)^{2-s} u_s(x),$$

$$D^{s-1}u_s(z) := \lim_{x \rightarrow z} -\partial_\nu [(1 - |x|^2)^{2-s} u_s(x)]$$

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_s = 1 & \text{en } B, \\ u_s = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus B, \\ D^{s-1}u_s(z) = 0 & \text{para } z \in \partial B, \\ D^{s-2}u_s(z) = 0 & \text{para } z \in \partial B. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = 1 & \text{en } B, \\ u_1 = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$



- La solución (normalizada)  $u_s$  se aproxima a la solución (normalizada)  $u_1$  “desde abajo”.

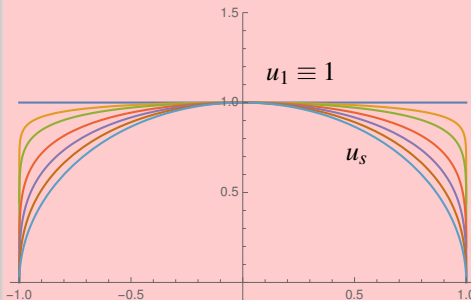
¿Qué pasa si  $s \searrow 1$  ?

$$D^{s-2}u_s(z) := \lim_{x \rightarrow z} (1 - |x|^2)^{2-s} u_s(x),$$

$$D^{s-1}u_s(z) := \lim_{x \rightarrow z} -\partial_v [(1 - |x|^2)^{2-s} u_s(x)]$$

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_s = 0 & \text{en } B, \\ u_s = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus B, \\ D^{s-1}u_s(z) = 1 & \text{para } z \in \partial B, \\ D^{s-2}u_s(z) = 0 & \text{para } z \in \partial B. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = 0 & \text{en } B, \\ u_1 = 1 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$



- $u_s$  se aproxima a  $u_1$  “desde abajo”.

¿Qué pasa si  $s \searrow 1$  ?

$$D^{s-2}u_s(z) := \lim_{x \rightarrow z} (1 - |x|^2)^{2-s} u_s(x),$$

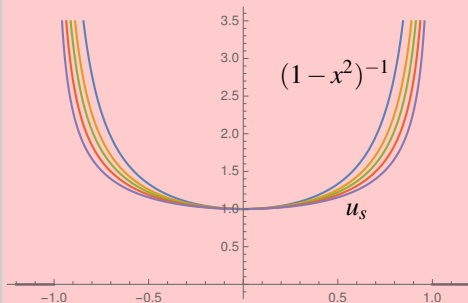
$$D^{s-1}u_s(z) := \lim_{x \rightarrow z} -\partial_\nu [(1 - |x|^2)^{2-s} u_s(x)]$$

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_s = 0 & \text{en } B, \\ u_s = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus B, \\ D^{s-1}u_s(z) = 0 & \text{para } z \in \partial B, \\ D^{s-2}u_s(z) = 1 & \text{para } z \in \partial B. \end{cases}$$

$$u_s(x) = (1 - |x|^2)^{s-2} \rightarrow (1 - |x|^2)^{-1}.$$

Para  $N = 1$ :

$$\partial_{xx}(1 - x^2)^{-1} = \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x-1)^3} \neq 0.$$



$u_s$  se aproxima a  $(1 - x^2)^{-1}$ , la cual

- no es integrable,
- no es harmónica.

## De regreso a nuestras preguntas fraccionarias:

- Si  $u_s$  es una solución de  $(-\Delta)^s u_s = f$  con ciertas condiciones de frontera, entonces ¿el mapeo  $s \mapsto u_s$  es continuo/diferenciable en algún sentido?
- Si  $(-\Delta)^2$  requiere de dos condiciones de frontera para tener problemas bien puestos y  $-\Delta$  sólo necesita una, ¿qué sucede con la condición extra cuando  $s \searrow 1$ ?
- ¿Las soluciones son más y más “patológicas” mientras  $s \nearrow 2$  o son esencialmente iguales para cualquier  $s > 1$ ?
- ¿La función de Green de  $(-\Delta)^s$  en una elipse  $E = \{x^2 + 25y^2 < 1\}$  cambia de signo para cualquier  $s > 1$ ?



# Diferenciabilidad del mapeo $s \mapsto u_s$ en dominios generales

Para  $z > 0$  y  $s \in [0, 1]$

$$\frac{d}{ds}(z^s h(s)) = \ln(z) z^s h(s) + z^s h'(s).$$

Si

$$(-\Delta)^s u_s = f \quad \text{en } \Omega, \quad u_s = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}^N \setminus \Omega,$$

se puede demostrar que  $s \mapsto u_s$  es diferenciable (S. Jarošs, A.S., T. Weth, 2019) y

$$0 = \frac{d}{ds} \left( (-\Delta)^s u_s \right) = \ln(-\Delta) \left( (-\Delta)^s u_s \right) + (-\Delta)^s \left( \frac{d}{ds} u_s \right)$$

donde  $\ln(-\Delta)$  es el laplaciano logarítmico. Entonces  $v_s := \frac{d}{ds} u_s$  es la solución de

$$(-\Delta)^s v_s = -\ln(-\Delta) \left( (-\Delta)^s u_s \right) \quad \text{en } \Omega, \quad v_s = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

# El laplaciano logarítmico $\ln(-\Delta)$ en una nuez

(H. Chen, T. Weth, 2018)

Sea  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

- $\ln(-\Delta)$  es un operador pseudodiferencial y su símbolo de Fourier es  $2 \ln(|\xi|)$ , es decir,

$$\mathcal{F}(\ln(-\Delta)\varphi)(\xi) = 2 \ln(|\xi|) \mathcal{F}(\varphi)(\xi).$$

- Para  $x \in \mathbb{R}^N$ :

$$\ln(-\Delta)\varphi(x) = c_N \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{\varepsilon < |y| < 1\}} \frac{\varphi(x) - \varphi(x+y)}{|y|^N} dy - c_N \int_{\{|y| > 1\}} \frac{\varphi(x+y)}{|y|^N} dy + \rho_N \varphi(x).$$

- Se cumple que

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (-\Delta)^s \varphi(x) = \ln(-\Delta)\varphi(x)$$

- No es un operador que preserve positividad, es decir,

$$\ln(-\Delta)u = f \geq 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{no implica que} \quad u \geq 0 \quad \text{en } \Omega$$

## Algunos resultados para $s \in [0, 1]$

Recordemos que  $v_s = \frac{d}{ds}u_s$ ,  $u_s = v_s = 0$  en  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$  y

$$(-\Delta)^s u_s = f \geq 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (-\Delta)^s v_s = -\ln(-\Delta)\left((- \Delta)^s u_s\right) \quad \text{en } \Omega.$$

*Teorema (S. Jarohs, A.S., T. Weth, 2019)*

$s \mapsto u_s(x)$  es decreciente en  $[0, 1]$  para todo  $x \in \Omega$  si y sólo si  $-\ln(-\Delta)f \leq 0$  en  $\Omega$ .

*Corolario (S. Jarohs, A.S., T. Weth, 2019)*

Existe  $r_N > 0$  tal que

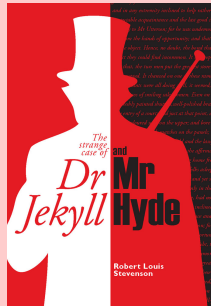
- si  $\Omega \subset B_{r_N}(0)$ , entonces  $s \mapsto u_s$  es decreciente en  $[0, 1]$
- si  $B_{r_N}(0) \subset \Omega$  y  $f \equiv 1$  entonces  $s \mapsto u_s(0)$  no es decreciente para en  $[0, 1]$ .

Nota:  $\frac{r_N}{\sqrt{N}} \rightarrow c > 0$  cuando  $N \rightarrow \infty$ .

( ¡Muchas gracias! )<sup>S</sup>

*"If he could but once set eyes on him, he thought the mystery would lighten and perhaps roll altogether away, as was the habit of mysterious things when well examined."*

— *Robert Louis Stevenson, The strange case of Dr. Jekyll and Mr. Hyde.*



## Algunas extensiones: Cualquier $s > 0$

Sea  $s \in (0, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$(-\Delta)^s u(x) := c_{N,s,n} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\sum_{k=-n}^n (-1)^k \binom{2n}{n-k} u(x+ky)}{|y|^{N+2s}} dy$$

En una bola, la función de Green  $G_s$  y el núcleo no-local de Poisson  $\Gamma_s$  tienen la misma fórmula, mientras que

$$E_{k,s}(x, \theta) = \frac{1}{\omega_N} (1 - |x|^2)_+^s D^{m-k} \zeta_x(\theta), \quad \text{donde} \quad \zeta_x(y) := \frac{|y|^{N-2}}{|x-y|^N}$$

y

$$D^{k+\sigma-1} u(z) := \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{x \rightarrow z} \frac{\partial^k}{\partial (|x|^2)^k} [(1 - |x|^2)^{1-\sigma} u(x)] \quad \text{para } z \in \partial B. \quad (1)$$