

Perfiles de concentración en soluciones de EDP nonlineales con condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann.

Alberto Saldaña.
(en colaboración con M. Grossi y H. Tavares)

Seminario de Ecuaciones Diferenciales No Lineales
4 de Diciembre de 2018.

Problema modelo

Sea $n \geq 3$, $p \in (0, \frac{n+2}{n-2})$, y sea u una solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{en } B, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases}$$

donde $B = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$.

La ecuación de Lane-Emden (1870)

Si $n = 3$, $p \in (0, 5)$ y u es radialmente simétrica y positiva, entonces $\theta(|x|) = u(x)$, es una solución de la *ecuación de Lane-Emden de índice p* ,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta(r)}{dr} \right) + \theta(r)^p = 0, \quad \theta(0) = 1,$$

la cual modela esferas en equilibrio politrópico y convectivo.

- $\frac{dM(r)}{dr} = Cr^2\rho(r)$ (continuidad de masa),
- $\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G}{r^2}M(r)\rho(r)$ (equilibrio hidrostático),
- $P(r) = K\rho(r)^{\frac{p+1}{p}}$ (fluido politrópico),
- $\theta(r) = Q\rho(r)^{\frac{1}{p}}$ (cambio de variables),

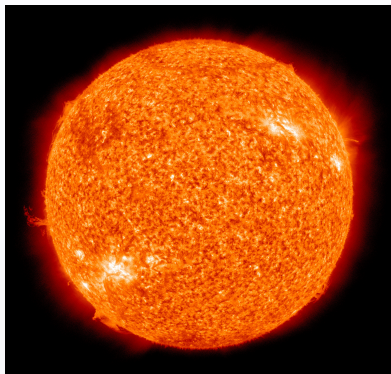
donde $M(r)$ es la masa dentro de una esfera de radio r , ρ es la densidad (de masa), y P es la presión.

La ecuación de Lane-Emden

Si $n = 3$, $p \in (0, 5)$ y u es radialmente simétrica y positiva, entonces $\theta(|x|) = u(x)$, es una solución de la *ecuación de Lane-Emden de índice p* ,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta(r)}{dr} \right) + \theta(r)^p = 0, \quad \theta(0) = 1,$$

la cual modela esferas en equilibrio politrópico y convectivo.



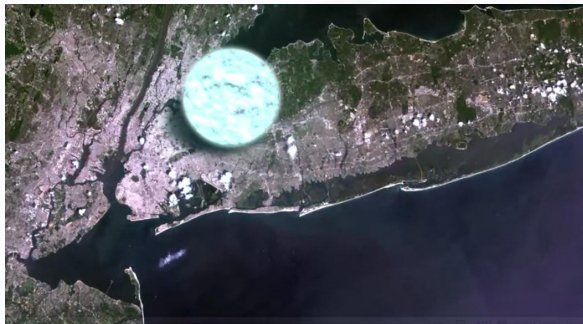
Salvo por constantes:

- θ es la **temperatura**.
- θ^{p+1} es la **presión**.
- La primera raíz r_1 de θ es el **radio** de la estrella.
- $\int_0^{r_1} \theta(r)^p r^2 dr$ es la **masa total**.

La ecuación de Lane-Emden

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta(r)}{dr} \right) + \theta(r)^p = 0.$$

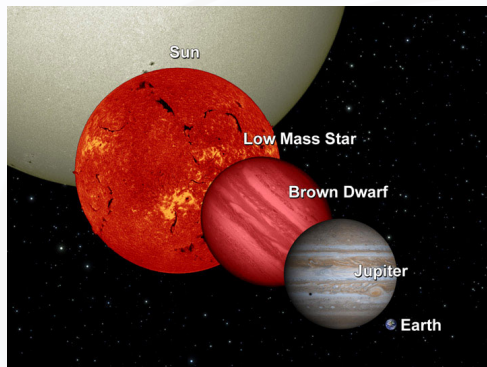
Algunos valores del índice politrópico p son de particular importancia física:
 $p \in (0.5, 1)$ produce una buena aproximación para **estrellas de neutrones**.



La ecuación de Lane-Emden

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta(r)}{dr} \right) + \theta(r)^p = 0.$$

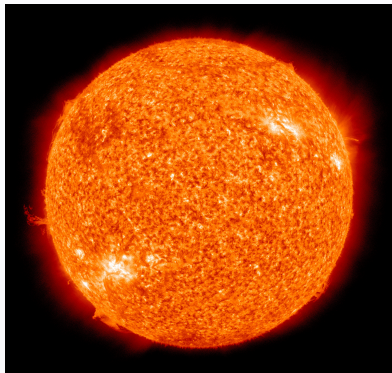
Algunos valores del índice politrópico p son de particular importancia física:
 $p \in (1, 1.5)$ produce una buena aproximación para **enanas marrones**.



La ecuación de Lane-Emden

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta(r)}{dr} \right) + \theta(r)^p = 0.$$

Algunos valores del índice politrópico son de particular importancia física:



- $p = 3$ produce una buena aproximación para el Sol.
- Cuando $p \rightarrow 5$, el radio de la estrella (o la temperatura en el centro) tiende a infinito.

El exponente crítico

El problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon} u & \text{en } B, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases}$$

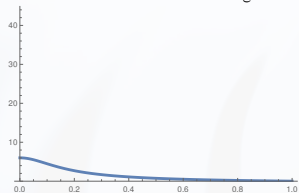
no tiene soluciones no triviales si $\varepsilon \leq 0$ (debido a la identidad de Pohozahev).

La solución positiva

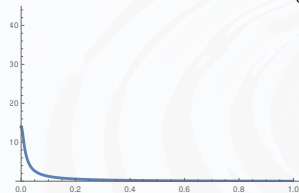
Para $\varepsilon > 0$, el problema

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon} u_\varepsilon & \text{en } B, \\ u_\varepsilon > 0 & \text{en } B, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases}$$

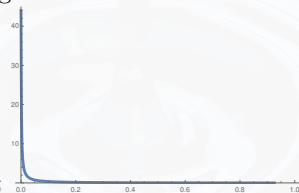
tiene una solución u_ε la cual se concentra en el origen cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.



$\varepsilon = 1$



$\varepsilon = 0.1$



$\varepsilon = 0.01$

La tasa de concentración (para $n = 3$)

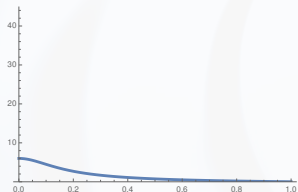
$$-\Delta u_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon} u_\varepsilon \quad \text{en } B,$$

De hecho, se puede calcular de forma precisa la *tasa de concentración*

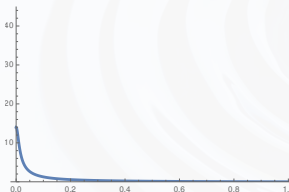
(Atkinson-Peletier, 1987)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon u_\varepsilon^2(0) = \frac{32\sqrt{3}}{\pi}, \quad (u_\varepsilon(0) \sim \varepsilon^{-\frac{1}{2}})$$

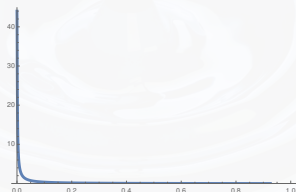
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} u_\varepsilon(x) = \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} (|x|^{2-n} - 1) \quad \text{para } |x| \in (0, 1] \quad (u_\varepsilon(x) \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$



$\varepsilon = 1$



$\varepsilon = 0.1$



$\varepsilon = 0.01$

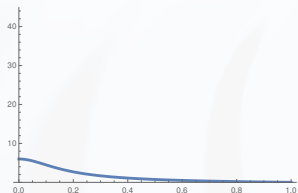
La tasa de concentración (para $n \geq 3$)

De hecho, se puede calcular de forma precisa la *tasa de concentración*

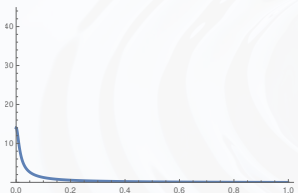
(Atkinson-Peletier, 1987)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon u_\varepsilon^2(0) = (n(n-2))^{\frac{n-2}{2}} \frac{4\Gamma(n)}{(n-2)\Gamma(\frac{n}{2})^2}, \quad (u_\varepsilon(0) \sim \varepsilon^{-\frac{1}{2}})$$

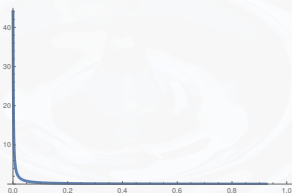
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} u_\varepsilon(x) = (n(n-2))^{\frac{n-2}{4}} \left(\frac{(n-2)\Gamma(\frac{n}{2})^2}{4\Gamma(n)} \right)^{\frac{1}{2}} (|x|^{2-n} - 1) \quad \text{para } |x| \in (0, 1].$$



$\varepsilon = 1$



$\varepsilon = 0.1$



$\varepsilon = 0.01$

La tasa de concentración (revisitado)

Dos años después:

(Brezis-Peletier, 1989) $\longleftrightarrow -\Delta - \lambda$ para $\lambda \geq 0$ usando **herramientas de EDP**

(identidad de Pohozahev, funciones de Green, regularidad elíptica,...)

Y lanzaron la conjetura que algo similar debería ocurrir en dominios acotados estrellados más generales.

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon} u_\varepsilon & \text{en } \Omega, \\ u_\varepsilon > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prueba de la conjetura

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = n(n-2)|u_\varepsilon|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon}u_\varepsilon & \text{en } \Omega, \\ u_\varepsilon > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

(Rey, 1989), (Han, 1991)

Sea u_ε una solución tal que $\frac{\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2}{\|u_\varepsilon\|_{L^{p+1}}^2} = S_n + o(1)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces

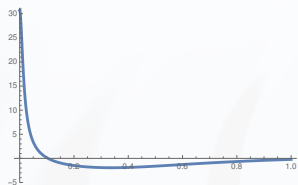
- (i) $\exists x_0 \in \Omega$ tal que $u \rightarrow 0$ en $C^1(\Omega \setminus \{x_0\})$,
- (ii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}^2 = 2|\partial B|^2 \left(\frac{n(n-2)}{S_n}\right)^{\frac{n}{2}} |g(x_0, x_0)|$.
- (iii) $\frac{u_\varepsilon(x)}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow \left(\frac{n(n-2)}{S_n}\right)^{\frac{n}{4}} \frac{(n-2)}{\sqrt{2|g(x_0, x_0)|}} G(x, x_0)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

Aquí $g(x, y)$ denota la parte regular de la **función de Green** de Ω .

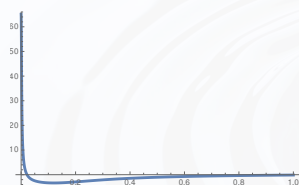
¿Y qué se sabe sobre soluciones radiales que cambian de signo?

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon} u_\varepsilon & \text{en } B, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

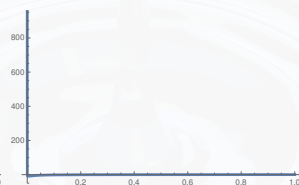
Existen una infinidad de soluciones nodales y radiales que se concentran cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.



$\varepsilon = 1$



$\varepsilon = 0.6$

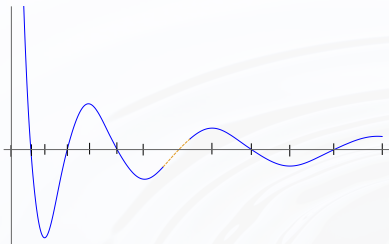


$\varepsilon = 0.1$

Pregunta 1: ¿Se pueden obtener tasas de concentración precisas para soluciones nodales y radiales?

... o sobre soluciones radiales de Neumann?

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon} u_\varepsilon & \text{en } B, \\ \partial_\nu u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$



Pregunta 2: ¿Se pueden obtener tasas de concentración para soluciones radiales de Neumann?

Notemos que todas las soluciones (no-triviales) de Neumann cambian de signo porque

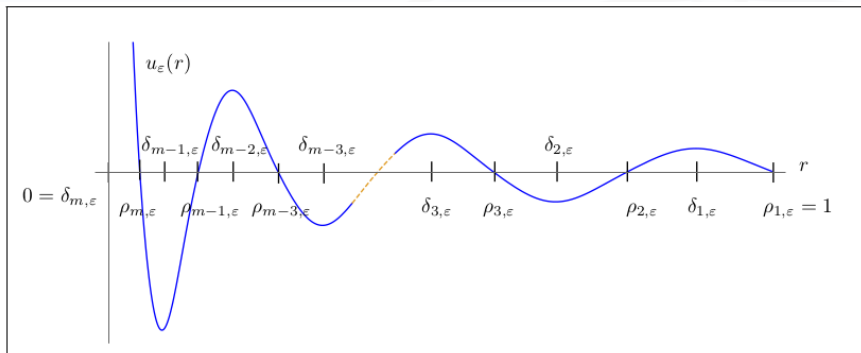
$$\int_B |u_\varepsilon|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon} u_\varepsilon = - \int_B \Delta u_\varepsilon = \int_B \nabla u_\varepsilon \nabla 1 = 0.$$

Teorema (Grossi-S.-Tavares, 2018)

Si u_ε es una solución radial de Dirichlet con $m - 1$ ceros interiores, entonces

$u_\varepsilon(\delta_{k,\varepsilon}) \sim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-(k-1)}$ (máximos y mínimos), $\delta_{k,\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{2(n-1)}{n(n-2)} + \frac{2}{n-2}(k-1)}$ (puntos críticos),

$u'_\varepsilon(\rho_{k,\varepsilon}) \sim \varepsilon^{\frac{1}{2} - \frac{n}{n-2}(k-1)}$ (derivada en raíces), $\rho_{k,\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{2}{n-2}(k-1)}$ (raíces).

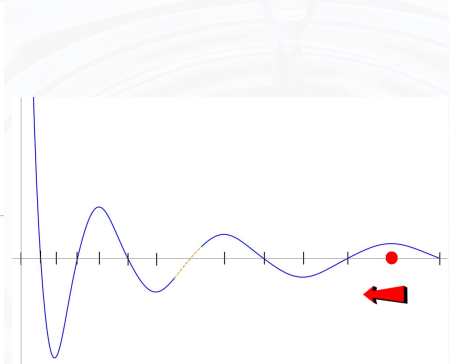
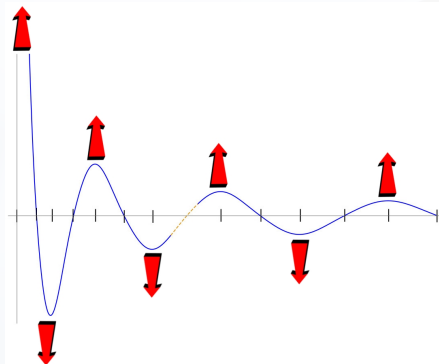


Teorema (Grossi-S.-Tavares, 2018)

Si u_ε es una solución radial de **Dirichlet** con $m - 1$ ceros interiores, entonces

$u_\varepsilon(\delta_{k,\varepsilon}) \sim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-(k-1)}$ (máximos y mínimos), $\delta_{k,\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{2(n-1)}{n(n-2)} + \frac{2}{n-2}(k-1)}$ (puntos críticos),

$u'_\varepsilon(\rho_{k,\varepsilon}) \sim \varepsilon^{\frac{1}{2} - \frac{n}{n-2}(k-1)}$ (derivada en raíces), $\rho_{k,\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{2}{n-2}(k-1)}$ (raíces).



Teorema (Grossi-S.-Tavares, 2018)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u_\varepsilon(\delta_{k,\varepsilon})| (\kappa_n \varepsilon)^{\frac{2k-1}{2}} = D(k, m) \quad \text{para } k \in \{1, \dots, m\},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{k,\varepsilon} (\kappa_n \varepsilon)^{-\frac{2(kn-1)}{n(n-2)}} = d(k, m) \quad \text{para } k \in \{1, \dots, m-1\} \text{ si } m \geq 2,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u'_\varepsilon(\rho_{k,\varepsilon})| (\kappa_n \varepsilon)^{\frac{2kn-3n+2}{2(n-2)}} = Z(k, m) \quad \text{para } k \in \{1, \dots, m\},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_{k,\varepsilon} (\kappa_n \varepsilon)^{-\frac{2(k-1)}{n-2}} = z(k, m) \quad \text{para } k \in \{2, \dots, m\} \text{ si } m \geq 2;$$

donde $\kappa_n = (n-2)\Gamma(\frac{n}{2})^2 / (4\Gamma(n))$ y

$$D(k, m) = (n(n-2))^{\frac{n-2}{4}} \frac{\Gamma(m-k+1)}{m^{\frac{1}{2}}\Gamma(m)},$$

$$d(k, m) = (m-k)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{m^{\frac{1}{2}}\Gamma(m)}{\Gamma(m-k+1)} \right)^{\frac{2}{n-2}},$$

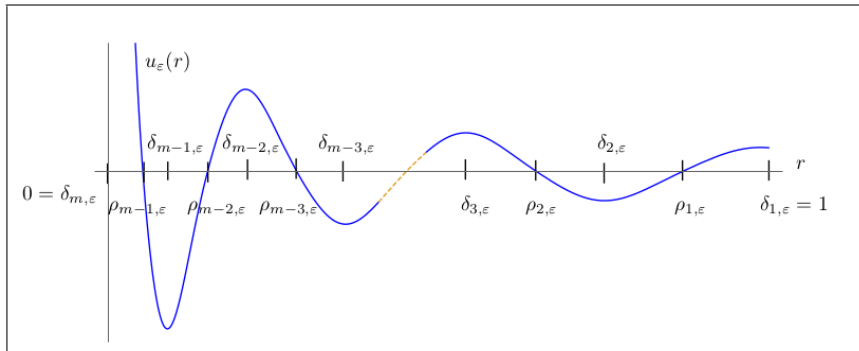
$$Z(k, m) = n^{\frac{n-2}{4}} (n-2)^{\frac{n+2}{4}} (m-k+1)^{\frac{n-1}{n-2}} \left(\frac{\Gamma(m-k+1)}{m^{\frac{1}{2}}\Gamma(m)} \right)^{\frac{n}{n-2}},$$

$$z(k, m) = (m-k+1)^{-\frac{1}{n-2}} \left(\frac{m^{\frac{1}{2}}\Gamma(m)}{\Gamma(m-k+1)} \right)^{\frac{2}{n-2}}.$$

Teorema (Grossi-S.-Tavares, 2018)

Si u_ε es una solución radial de **Neumann** con $m - 1$ ceros interiores, entonces

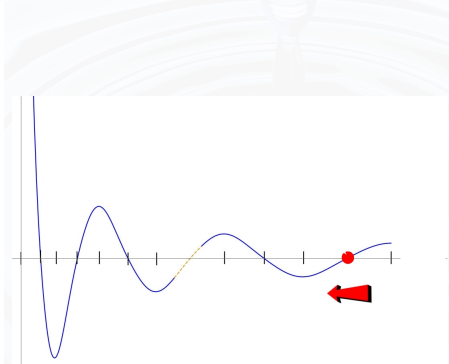
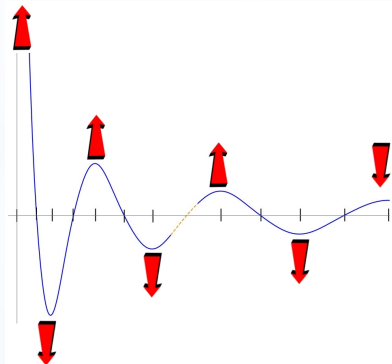
$$u_\varepsilon(\delta_{k,\varepsilon}) \sim \varepsilon^{\frac{n-2}{2n} - (k-1)} \text{ (máximos y mínimos)}, \quad \delta_{k,\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{2(k-1)}{n-2}} \text{ (puntos críticos)},$$
$$u'_\varepsilon(\rho_{k,\varepsilon}) \sim \varepsilon^{\frac{n-4}{2(n-2)} - \frac{n(k-1)}{n-2}} \text{ (derivada en raíces)}, \quad \rho_{k,\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{2}{n(n-2)} + \frac{2(k-1)}{n-2}} \text{ (raíces)}.$$



Teorema (Grossi-S.-Tavares, 2018)

Si u_ε es una solución radial de **Neumann** con $m - 1$ ceros interiores, entonces

$$u_\varepsilon(\delta_{k,\varepsilon}) \sim \varepsilon^{\frac{n-2}{2n} - (k-1)} \text{ (máximos y mínimos)}, \quad \delta_{k,\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{2(k-1)}{n-2}} \text{ (puntos críticos)},$$
$$u'_\varepsilon(\rho_{k,\varepsilon}) \sim \varepsilon^{\frac{n-4}{2(n-2)} - \frac{n(k-1)}{n-2}} \text{ (derivada en raíces)}, \quad \rho_{k,\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{2}{n(n-2)} + \frac{2(k-1)}{n-2}} \text{ (raíces)}.$$



Teorema (Grossi-S.-Tavares, 2018)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u_\varepsilon(\delta_{k,\varepsilon})| (\kappa_n \varepsilon)^{\frac{2kn-3n+2}{2n}} &= \tilde{D}(k, m) && \text{para } k \in \{1, \dots, m\}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{k,\varepsilon} (\kappa_n \varepsilon)^{-\frac{2(k-1)}{n-2}} &= \tilde{d}(k, m) && \text{para } k \in \{2, \dots, m-1\}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u'_\varepsilon(\rho_{k,\varepsilon})| (\kappa_n \varepsilon)^{\frac{2kn-3n+4}{2(n-2)}} &= \tilde{Z}(k, m) && \text{para } k \in \{1, \dots, m-1\}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_{k,\varepsilon} (\kappa_n \varepsilon)^{-\frac{2kn-2n+2}{n(n-2)}} &= \tilde{z}(k, m) && \text{para } k \in \{1, \dots, m-1\}; \end{aligned}$$

donde $\kappa_n = (n-2)\Gamma(\frac{n}{2})^2 / (4\Gamma(n))$ y

$$\begin{aligned} \tilde{D}(k, m) &= (n(n-2))^{\frac{n-2}{4}} (m-1)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} \frac{\Gamma(m-k+1)}{\Gamma(m)}, \\ \tilde{d}(k, m) &= (m-1)^{-\frac{1}{n}} (m-k)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-k+1)} \right)^{\frac{2}{n-2}}, \\ \tilde{Z}(k, m) &= n^{\frac{n-2}{4}} (n-2)^{\frac{n+2}{4}} (m-1)^{\frac{1}{2}} (m-k)^{-\frac{1}{n-2}} \left(\frac{\Gamma(m-k+1)}{\Gamma(m)} \right)^{\frac{n}{n-2}}, \\ \tilde{z}(k, m) &= (m-1)^{-\frac{1}{n}} (m-k)^{\frac{1}{n-2}} \left(\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-k+1)} \right)^{\frac{2}{n-2}}. \end{aligned}$$

Algunas observaciones

Dirichlet: $u_\varepsilon(0) \sim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-m}$

$u_\varepsilon(\delta_{k,\varepsilon}) \sim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-(k-1)}$ (max. & min.), $\delta_{k,\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{2(n-1)}{n(n-2)} + \frac{2(k-1)}{n-2}}$ (puntos críticos),

$u'_\varepsilon(\rho_{k,\varepsilon}) \sim \varepsilon^{\frac{1}{2} - \frac{n(k-1)}{n-2}}$ (derivada en raíces), $\rho_{k,\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{2(k-1)}{n-2}}$ (raíces).

Neumann: $u_\varepsilon(0) \sim \varepsilon^{\frac{2n-2}{2n}-m}$

$u_\varepsilon(\delta_{k,\varepsilon}) \sim \varepsilon^{\frac{n-2}{2n}-(k-1)}$ (max. & min.), $\delta_{k,\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{2(k-1)}{n-2}}$ (puntos críticos),

$u'_\varepsilon(\rho_{k,\varepsilon}) \sim \varepsilon^{\frac{n-4}{2(n-2)} - \frac{n(k-1)}{n-2}}$ (derivada en raíces), $\rho_{k,\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{2}{n(n-2)} + \frac{2(k-1)}{n-2}}$ (raíces).

$k \in \{1, 2, \dots\} \sim$ cerca de la frontera, $k \in \{\dots, m-1, m\} \sim$ cerca del origen,
donde $m-1$ es el número de zeros interiores

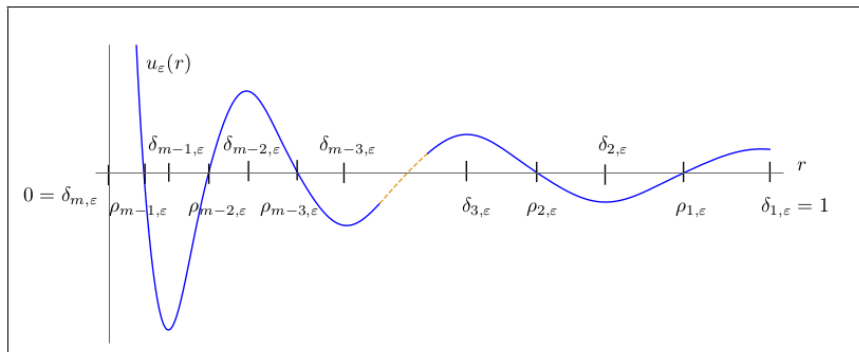
Algunas observaciones

En el caso de Neumann,

for $n = 3$, $|u'_\varepsilon(\rho_{1,\varepsilon})| \rightarrow \infty$;

for $n = 4$, $|u'_\varepsilon(\rho_{1,\varepsilon})| \rightarrow 4\sqrt{2}$;

for $n \geq 5$, $u'_\varepsilon(\rho_{1,\varepsilon}) \rightarrow 0$.



Algunas consecuencias

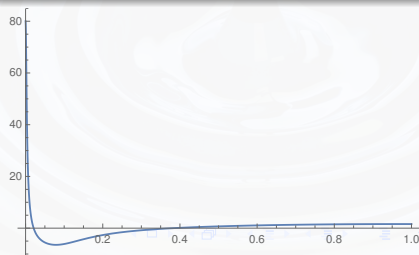
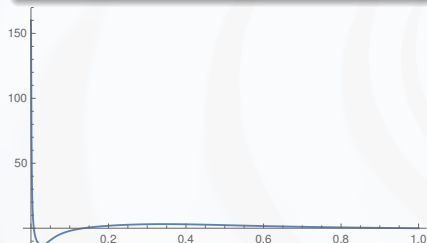
Teorema (Grossi-S.-Tavares, 2018)

Si $u_{D,\varepsilon}$ (resp. $u_{N,\varepsilon}$) es una solución radial de Dirichlet (resp. Neumann) con $m - 1$ ceros interiores, entonces

$$|u_{D,\varepsilon}(x)|(\kappa_n\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = (n(n-2))^{\frac{n-2}{4}} m^{\frac{1}{2}} (|x|^{2-n} - 1) + o(1),$$

$$|u_{N,\varepsilon}(x)|(\kappa_n\varepsilon)^{-\frac{n-2}{2n}} = (n(n-2))^{\frac{n-2}{4}} (m-1)^{\frac{n-2}{2n}} + o(1),$$

donde $o(1) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, uniformemente en subconjuntos compactos de $\overline{B} \setminus \{0\}$. En particular, las soluciones convergen uniformemente a cero en subconjuntos compactos de $\overline{B} \setminus \{0\}$.



Torre de burbujas de Dirichlet

Teorema (Pistoia-Weth (2005), Contreras-Del Pino (2006))

Para $\varepsilon > 0$ pequeño existen $\alpha_k > 0$, $f_\varepsilon \in L^\infty(B)$ y u_ε con $m - 1$ esferas nodales interiores tales que $-\Delta u_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon} u_\varepsilon$ en B , $u_\varepsilon = 0$ sobre ∂B y

$$u_\varepsilon(y) = \gamma_n \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{1 + [\alpha_k \varepsilon^{\frac{1}{2}-k}]^{\frac{4}{n-2}} |y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \alpha_k \varepsilon^{\frac{1}{2}-k} - f_\varepsilon(y) \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

para $y \in B$.

- $u(0) \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}-m}$
- $u(y) \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}}, y \neq 0$

Torre de burbujas de Dirichlet

Teorema (Pistoia-Weth (2005), Contreras-Del Pino (2006))

Para $\varepsilon > 0$ pequeño existen $\alpha_k > 0$, $f_\varepsilon \in L^\infty(B)$ y u_ε con $m - 1$ esferas nodales interiores tales que $-\Delta u_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon} u_\varepsilon$ en B , $u_\varepsilon = 0$ sobre ∂B y

$$u_\varepsilon(y) = \gamma_n \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{1 + [\alpha_k \varepsilon^{\frac{1}{2}-k}]^{\frac{4}{n-2}} |y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \alpha_k \varepsilon^{\frac{1}{2}-k} - f_\varepsilon(y) \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

para $y \in B$.

Teorema (Grossi-S.-Tavares, 2018)

$$\alpha_k = \frac{\Gamma(m-k+1)}{m^{\frac{1}{2}} \Gamma(m)} \left(\frac{(n-2) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2}{4 \Gamma(n)} \right)^{\frac{1}{2}-k},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_\varepsilon - (n(n-2))^{\frac{n-2}{4}} \alpha_0\|_{L^\infty(K)} = 0.$$

Torre de burbujas de Neumann

Teorema (Grossi-S.-Tavares, 2018)

Para $\varepsilon > 0$ pequeño existen $\alpha_k > 0$, $g_\varepsilon \in L^\infty(B)$ y u_ε con $m - 1$ esferas nodales interiores tales que $-\Delta u_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon} u_\varepsilon$ en B , $\partial_\nu u_\varepsilon = 0$ sobre ∂B y

$$u_\varepsilon(y) = \gamma_n \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{1 + [\beta_{k,\varepsilon} \varepsilon^{\frac{n-2}{2n} - (k-1)}]^{\frac{4}{n-2}} |y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \beta_{k,\varepsilon} \varepsilon^{\frac{n-2}{2n} - (k-1)} + g_\varepsilon(y) \varepsilon^{1 + \frac{n-2}{2n}},$$

para $y \in B$, donde $\beta_{k,\varepsilon} \rightarrow \beta_k$,

$$\beta_k = (m-1)^{\frac{n-2}{2n}} \frac{\Gamma(m-k+1)}{\Gamma(m)} \left(\frac{(n-2)}{4} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})^2}{\Gamma(n)} \right)^{\frac{n-2}{2n} - (k-1)}$$

y g_ε es una función uniformemente acotada en B .

Problemas en todo el espacio

Teorema (Grossi-S.-Tavares, 2018)

Sea $w_\varepsilon \in C^2([0, \infty))$ una solución radial de

$$-\Delta w_\varepsilon = |w_\varepsilon|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon} w_\varepsilon \quad \text{en } \mathbb{R}^n, \quad w_\varepsilon(0) = 1,$$

y sean $(r_{i,\varepsilon})_{i=1}^\infty$ y $(s_{i,\varepsilon})_{i=1}^\infty$ respectivamente las sucesiones (divergentes) crecientes de todos los ceros y puntos críticos de w_ε tales que

$$0 = s_{1,\varepsilon} < r_{1,\varepsilon} < s_{2,\varepsilon} < r_{2,\varepsilon} < \dots < s_{i,\varepsilon} < r_{i,\varepsilon} < \dots$$

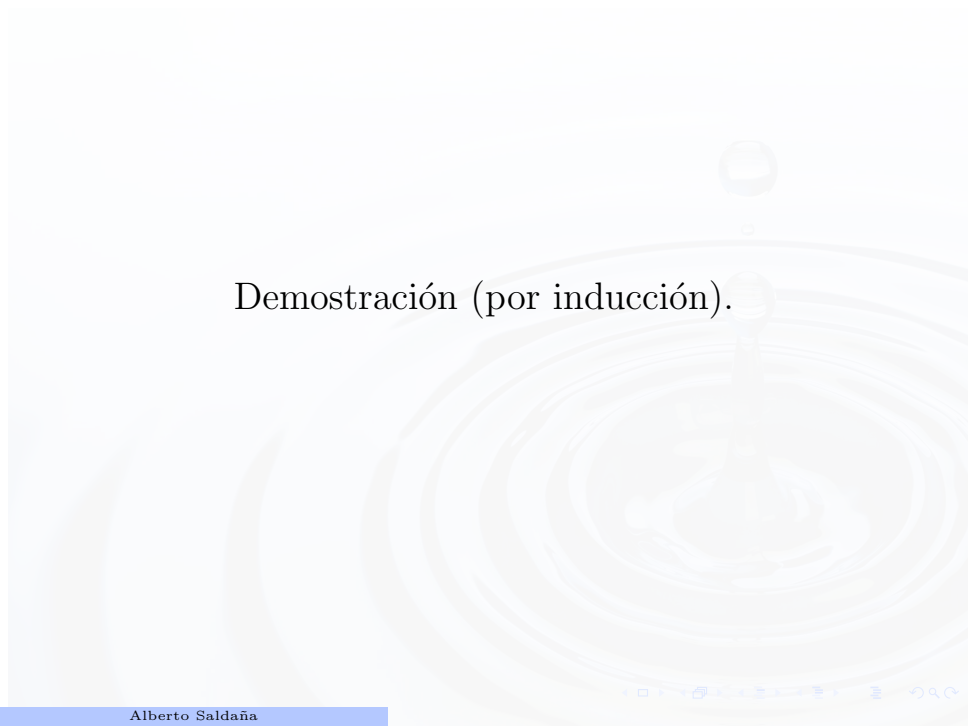
Entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_{m,\varepsilon} (\kappa_n \varepsilon)^{\frac{2m-1}{n-2}} = (n(n-2))^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2-n}} \Gamma(m)^{-\frac{2}{n-2}} \quad \text{para } m \geq 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |w'_\varepsilon(r_{m,\varepsilon})| (\kappa_n \varepsilon)^{\frac{1-mn}{n-2}} = ((n-2)n^{-1})^{\frac{1}{2}} m^{\frac{n-1}{n-2}} \Gamma(m)^{\frac{n}{n-2}} \quad \text{para } m \geq 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_{m,\varepsilon} (\kappa_n \varepsilon)^{\frac{2mn-3n+2}{n(n-2)}} = (n(n-2))^{\frac{1}{2}} (m-1)^{\frac{1}{n}} \Gamma(m)^{-\frac{2}{n-2}} \quad \text{para } m \geq 2,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |w_\varepsilon(s_{m,\varepsilon})| (\kappa_n \varepsilon)^{1-m} = \Gamma(m) \quad \text{para } m \geq 2.$$



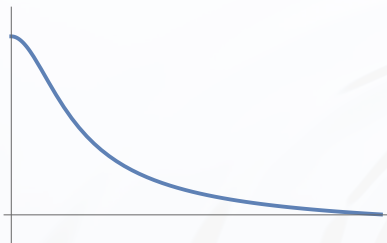
Demostración (por inducción).

Solución positiva de Dirichlet: $v_{1,\varepsilon}$

(Atkinson-Peletier, 1987)+(Han,1991)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\frac{1}{2}} v_{1,\varepsilon}(0) = D(1, 1),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} v'_{1,\varepsilon}(1) = R(1, 1).$$



Solución positiva de Dirichlet: $v_{1,\varepsilon}$

(Atkinson-Peletier, 1987)+(Han,1991)

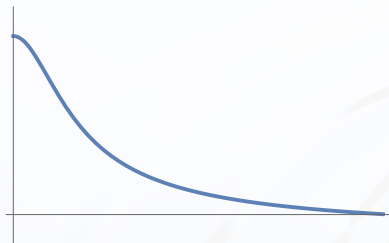
$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} v_{1,\varepsilon}(0) = D(1,1) + o(1),$$

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} v'_{1,\varepsilon}(1) = R(1,1) + o(1).$$

Tenemos **2 incógnitas** y 2 ecuaciones.

$$A_\varepsilon x_\varepsilon = B_\varepsilon,$$

$$C_\varepsilon y_\varepsilon = Z_\varepsilon.$$

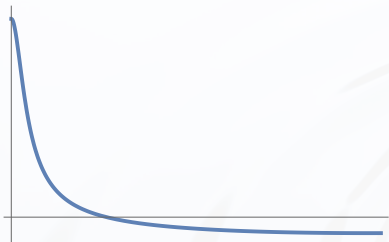


Soluciones de Neumann con 1 cero interior: $v_{2,\varepsilon}$

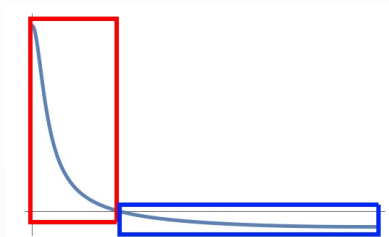
Incógnitas:

$$v_{2,\varepsilon}(0), \quad v_{2,\varepsilon}(1), \quad \rho_\varepsilon, \quad v'_{2,\varepsilon}(\rho_\varepsilon),$$

Necesitamos: **Cuatro** ecuaciones.



Soluciones de Neumann con 1 cero interior: $v_{2,\varepsilon}$



Rescalamiento:

$$v_{1,\varepsilon}(x) = \rho_\varepsilon^{\frac{2(n-2)}{4-\varepsilon(n-2)}} v_{2,\varepsilon}(x\rho_\varepsilon)$$

(se obtienen 2 ecuaciones)

Normalización ($\frac{v_{2,\varepsilon}(x)}{v_{2,\varepsilon}(1)} \rightarrow 1$)

+ Estimaciones de energía

(obtenemos las otras 2 ecuaciones)

Soluciones de Neumann con 1 cero interior: $v_{2,\varepsilon}$

El sistema que se obtiene es:

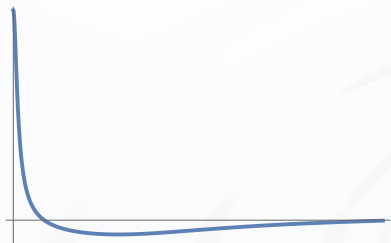
$$\begin{aligned}\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rho_\varepsilon^{\frac{2(n-2)}{4-\varepsilon(n-2)}} v_{2,\varepsilon}(0) &= D(1,1) + o(1), \\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \rho_\varepsilon^{\frac{2(n-2)}{4-\varepsilon(n-2)}+1} v'_{2,\varepsilon}(\rho_\varepsilon) &= Z(1,1) + o(1), \\ |v_{2,\varepsilon}(\delta_\varepsilon)|^{\frac{4}{n-2}-\varepsilon} \rho_\varepsilon^{2-n} &= n(n-2) + o(1), \\ |v'_{2,\varepsilon}(\rho_\varepsilon)| \rho_\varepsilon^{n-1} |v_{2,\varepsilon}(\delta_\varepsilon)|^{\varepsilon-\frac{n+2}{n-2}} &= n^{-1} + o(1).\end{aligned}$$

Solución de Dirichlet con 1 cero interior: $v_{3,\varepsilon}$

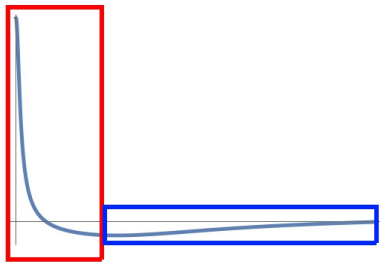
Incógnitas:

$$v_{3,\varepsilon}(0), \quad v'_{3,\varepsilon}(1), \quad \rho_\varepsilon, \quad v'_{3,\varepsilon}(\rho_\varepsilon), \\ \delta_\varepsilon, \quad v_{3,\varepsilon}(\delta_\varepsilon)$$

Necesitamos: Seis ecuaciones



Soluciones de Dirichlet con 1 cero interior: $v_{3,\varepsilon}$



Rescalamiento:

$$v_{2,\varepsilon}(x) = \delta_\varepsilon^{\frac{2(n-2)}{4-\varepsilon(n-2)}} v_{3,\varepsilon}(x\delta_\varepsilon)$$

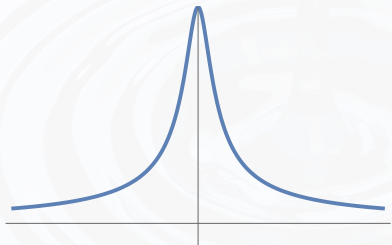
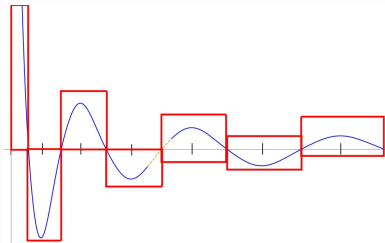
(se obtienen 4 ecuaciones)

Normalización

+ Identidad de Pohozahev
+ Estimaciones de energía

(Obtenemos las otras 2 ecuaciones)

Normalización (De Marchis-Ianni-Pacella, 2017)



$$\frac{v_{3,\varepsilon}(u(\delta_\varepsilon)^{\frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{n-2}} x)}{v_{3,\varepsilon}(\delta_\varepsilon)} \rightarrow U(x) = \left(1 + \frac{|x|^2}{n(n-2)}\right)^{\frac{2-n}{2}}$$

Soluciones de Dirichlet con 1 cero interior: $v_{3,\varepsilon}$

El sistema que se obtiene es:

$$\alpha \frac{2(n-2)}{4-\varepsilon(n-2)} \beta \varepsilon^{\frac{2-n}{2n}} = \tilde{D}(1,2) + o(1),$$

$$\alpha \frac{2(n-2)}{4-\varepsilon(n-2)} \gamma \varepsilon^{\frac{n+2}{2n}} = \tilde{D}(2,2) + o(1),$$

$$\alpha \frac{2(n-2)}{4-\varepsilon(n-2)} + 1 \zeta \varepsilon^{\frac{4-n}{2(n-2)}} = \tilde{Z}(1,2) + o(1),$$

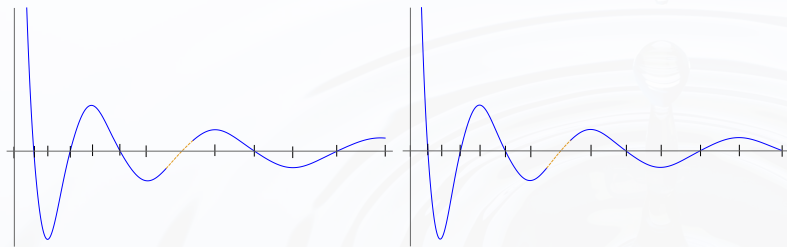
$$\alpha^{-1} \eta \varepsilon^{\frac{-2}{n(n-2)}} = \tilde{z}(1,2) + o(1),$$

$$\frac{\left(\delta^2 - \frac{2(n-2)}{2n-\varepsilon(n-2)} \beta^{\frac{2n}{n-2}-\varepsilon} \alpha^n \right)}{\varepsilon \beta^{\frac{\varepsilon(n-2)}{2}}} = n^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} + o(1),$$

$$\beta^{1-\frac{\varepsilon(n-2)}{2}} \delta = \frac{((n-2)n)^{\frac{n}{2}}}{n} + o(1).$$

$$\alpha = \delta_\varepsilon, \quad \beta = |v_{3,\varepsilon}(\delta)|, \quad \gamma = |v_{3,\varepsilon}(0)|, \quad \delta = |v'_{3,\varepsilon}(1)|, \quad \zeta = |v'_{3,\varepsilon}(\rho_\varepsilon)|, \quad \eta = \rho_\varepsilon.$$

Continuar inductivamente: $v_{4,\varepsilon}, v_{5,\varepsilon}, v_{6,\varepsilon}, \dots$



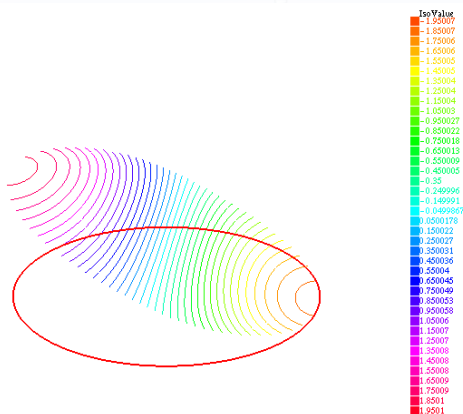
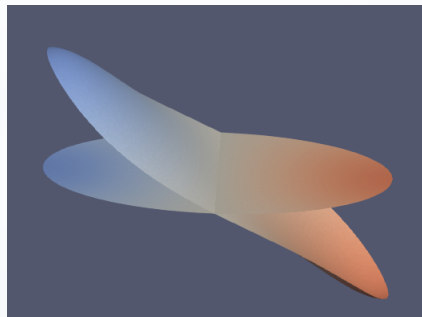
Suena sencillo... pero es un reto computacional

El cómputo de las **tasas** y **constantes**, aún para $v_{6,\varepsilon}$, requiere cientos (si no es que miles) de manipulaciones algebraicas básicas y un solo error de signo sería catastrófico.

Para evitar errores de cálculo, desarrollamos un algoritmo basado en un software de cálculo simbólico (Mathematica 11.1.1.0) para calcular algunas de las tasas y constantes, a partir de las cuales se pueden deducir fórmulas generales que pueden ser demostradas por inducción.

¿Qué se sabe sobre soluciones no-radiales de Neumann?

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{en } B, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

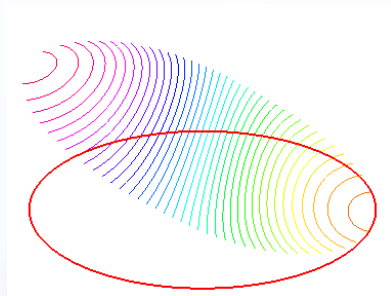


¿Qué se sabe sobre soluciones no-radiales de Neumann?

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{en } B, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

Existencia de soluciones (de energía mínima) y rompimiento de simetría:

- Caso sublineal: $p \in (0, 1)$
(Parini-Weth, 2015)
- Caso superlineal: $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$
(S.-Tavares, 2017)
- Caso crítico: $p = \frac{n+2}{n-2}$
(Comte-Knaap, 1990)



¡Muchas gracias!

A high-speed photograph of a single water droplet falling into a pool of water. The droplet is captured mid-fall, just above the point of impact, creating a series of concentric ripples that spread outwards. The background is a soft, light blue gradient.

- (with M. Grossi and H. Tavares) **”Sharp concentration estimates near criticality for radial sign-changing solutions of Dirichlet and Neumann problems”**, submitted, arXiv:1806.09437
- (with H. Tavares) **”Least energy nodal solutions of Hamiltonian elliptic systems with Neumann boundary conditions”**, Journal of Differential Equations, 2018.

The solution u_ε satisfies the so-called (pointwise) radial Pohozaev identity:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{r^n}{2n} (u'_\varepsilon(r))^2 + \frac{n-2}{2n} r^{n-1} u'_\varepsilon(r) u(r) + \frac{r^n}{n(p_\varepsilon+1)} |u_\varepsilon(r)|^{p_\varepsilon+1} \right)' \\ & = r^{n-1} |u_\varepsilon(r)|^{p_\varepsilon+1} \left(\frac{1}{p_\varepsilon+1} - \frac{n-2}{2n} \right) \end{aligned}$$