Serie 5

Para los ejercicios ① y ② usa el algoritmo de Fang-Cheng y las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} t & 1 & -1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}.$$

① Calcula la inversa de las matrices A y B.

② ¿Para cuales valores del parámetro t, las matrices C y D son invertibles? Calcula la inversa en su caso.

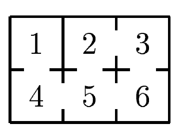
③ Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se llama *estocástica* si satisface las siguientes dos condiciones:

(i) $A_{ij} \geq 0$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$,

(ii) $\sum_{i=1}^{n} A_{ij} = 1$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Demuestra que el producto de dos matrices estocásticos de tamaño $n \times n$ es otra vez estocástica.

④ El siguiente bosquejo muestra un sótano en donde se mueve un ratón aleatorio cada noche de un cuarto a uno adyaciente (con la misma probabilidad).



Sea $P \in \mathbb{Q}^{6\times 6}$ es la matriz tal que P_{ij} es la probabilidad de que el ratón se mueve en una noche del cuarto j al cuarto i.

(a) Demuestra que P es una matriz estocástica.

(b) Calcula P^4.

(c) Si el ratón se encuentra en el cuarto 4, ¿cuál es la probabilidad de que vuelve a estar en el cuarto 4 después de cuatro noches?

(d) Si alguien recoge el ratón aleatorio y lo suelta al hazar en uno de los seis cuartos (con probabilidad $\frac{1}{6}$ para cada cuarto), ¿cuál es la probabilidad de encontrarlo después de cuatro noches en el cuarto i ($i = 1, \ldots, 6$)?

⑤ Sean C_1, C_2, C_3 Y C_4 cuatro ciudades y supongamos que el diagrama al lado derecho muestra las posibilidades de viajar de una ciudad a otra en un día. Sea $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ dado por M_{ij} es el número de maneras de viajar de C_j a C_i. Demuestra que el número de maneras de viajar de C_j a C_i en k días es $(M^k)_{ij}$.