Serie 6

① Calcula la matriz de escalones de las matrices A y B.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

② Sea $f : U \to V$ una función lineal. Demuestra:

(a) Para un subespacio $U' \subseteq U$ se tiene $\dim U' \geq \dim f(U')$

(b) Da dos ejemplos de $f : U \to V$ y de un subespacio $V' \subseteq V$ tales que se tiene $\dim f^{-1}(V') < \dim V'$ en uno y $\dim f^{-1}(V') > \dim V'$ en el otro.

③ Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz con entradas $A_{ij} = (i-1)n + j$.

(a) Para $n = 2, 3, 4$, escribe A explícitamente y calcula su rango.

(b) Calcula el rango de A en general (Cuidado: **no** es por inducción sobre n).

④ ¿Para cuáles valores de t la matriz

$$M = \begin{bmatrix} t & 1 & t \\ 1-t & 0 & t \\ 1 & t & t \end{bmatrix}$$

tiene rango 2?

⑤ Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ dos funciones lineales.

(a) Demuestra $\text{rango}(g \circ f) \leq \min\{\text{rango}(f), \text{rango}(g)\}$.

(b) Demuestra que $\text{rango}(g \circ f) = \text{rango}(g)$ si f es inyectiva.

(c) Da un ejemplo donde se tiene desigualdad estricta en (a).