

Serie 4

- ① Calcula el polinomio minimal de $J(1, 1) \oplus J(3, 1) \oplus J(2, 0)$.
- ② De una matriz $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ se sabe que su polinomio minimal es de la forma $p_A = (X - 1)(X - 3)^3$. ¿Cuáles posibilidades hay para la forma normal de Jordan de A ?
- ③ Sea k un campo, V un espacio vectorial sobre k y B una base del espacio vectorial V . Se define $b^* \in V^* = \mathcal{L}(V, k)$ por $b^*(c) = 0$ para $c \neq b$ y $b^*(b) = 1$.
 - (a) Demuestra que el conjunto $B^* = \{b^* \mid b \in B\}$ es linealmente independiente.
 - (b) Demuestra que, si V es de dimensión finita, entonces B^* es base de V^* . La base B^* se llama la **base dual de B** .
 - (c) Demuestra que B^* no es una base de V^* si $\dim_k V = \infty$.
- ④ Sean V y W espacios vectoriales con bases finitas B y C respectivamente. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal, M la matriz asociada en las bases B y C y M^* la matriz asociada a la función lineal f^* en las bases B^* y C^* . Demuestra $M^* = M^\top$.
- ⑤ Sea V un espacio vectorial con base finita B y $f_B : V \rightarrow V^*$ la función lineal que satisface $f_B(b) = b^*$. Entonces f_{B^*} es la función lineal $V^* \rightarrow V^{**}$ que satisface $f_{B^*}(b^*) = (b^*)^*$. Demuestra que $f_{B^*} \circ f_B$ es la función evaluación $\varepsilon : V \rightarrow V^{**}$, dada por $\varepsilon(v)(\varphi) = \varphi(v)$ para cada $v \in V$ y cada $\varphi \in V^*$.