Serie 6

① Demuestra que el producto interno y el producto externo son funciones bilineales con dominio $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

② Sean V y W dos espacios vectoriales con bases $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ y $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ respectivamente. Demuestra que

$$\{b_i \otimes c_j \mid i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots n\}$$

es una base de $V \otimes W$.

③ Sean V y W dos espacios vectoriales. Sea $S = \{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$ y observa que S es un subconjunto de $V \otimes W$.

(a) Indica un ejemplo para ver que *no* cada elemento de $V \otimes W$ es de esta forma. Muestra con el mismo ejemplo que S *no* es un subespacio de $V \otimes W$.

(b) Demuestra que para definir una función lineal es suficiente definirla en S.

④ Sea V un espacio vectorial y $j : V^* \times V \to V^* \otimes V$ la función bilineal definida por el producto tensorial. Además sea $g : V^* \times V \to k$ la función bilineal definida por $g(\varphi, v) = \varphi(v)$. ¿Cuál es la función *lineal* $G : V^* \otimes V \to k$ que "corresponde" a g (es decir, que satisface $g = G \circ j$)?

⑤ Sea V un espacio vectorial y $S \subseteq V \otimes V$ el subespacio generado por

$$\{v \otimes v \mid v \in V\}.$$

Definimos $\Lambda^2 V = V \otimes V / S$. La clase de equivalencia de un elemeto $v \otimes w$ se denota por $v \wedge w$.

(a) Demuestra que $v \wedge w = -w \wedge v$ para todo $v, w \in V$ y que $v \wedge w = 0$ si v, w son linealmente dependientes.

(b) Calcula una base de $\Lambda^2 V$.