Serie 5

① Sea $N \lhd G$ un subgrupo normal

(a) Demuestra que existe una correspondencia uno a uno entre los subgrupos de G que contienen N y los subgrupos de G/N.

(b) Demuestra que bajo esta correspondencia se corresponden los subgrupos normales.

② Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de potencia.

(a) Demuestra que la operación binaria $+$ en $\mathcal{P}(X)$ definida por

$$U + V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$$

define una estructura de grupo en $\mathcal{P}(X)$.

(b) Define una estructura de grupo en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X$.

(c) Demuestra que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X$ y $\mathcal{P}(X)$ son grupos isomorfos.

③ Sea G un grupo. Dos elementos g y h de G son *conjugados* (se denota $g \sim h$) si existe $x \in G$ tal que $h = xgx^{-1}$. Ser conjugado es una relación de equivalencia (no tienes que demostrarlo).

(a) Demuestra que si dos elementos son conjugados entonces tienen el mismo orden.

(b) Calcula las clases de conjugación en S_4.

④ Calcula todas las sucesiones normales de $C_{12} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ que son libres de repetición y marca aquellas que son sucesiones de composición.

⑤ ¿Cuántas sucesiones de composición diferentes tiene C_{1000}?