Serie 7

① Calcula los 2-subgrupos y los 3-subgrupos de Sylow de $\mathbb{Z}_{144}$ y de $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$.

② Calcula los 2-subgrupos y los 3-subgrupos de Sylow de Sym_4.

③ Sea G un grupo y $A \lhd G$ subgrupo normal que es abeliano. Demuestra que G/A actua sobre A por conjugación y obtén un homomorfismo $G/A \to \mathrm{Aut}(A)$.

④ El puzzle de Boss tiene 15 piezas movibles dentro de un cuadrado 4×4:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

La última celda, el "hueco", queda vacía y sirve para mover una de las piezas adyacientes en este lugar.

(a) Demuestra que no es posible "resolver" el puzzle, es decir, mover las piezas de tal manera que al final las piezas 14 y 15 hayan intercambiado.

(b) Sea X el conjunto de todas las *posiciones* que se pueden armar con las 15 piezas y el hueco y G el subgrupo de S_{16} generado por las transposiciones de dos *celdas* adyacientes (las celdas se enumeran del 1 al 16 de alguna pero fija manera). Cada transposición t de dos celdas adyacientes i y j opera en X: a cada posición P se le asigna una nueva posición tP de la sigueinte manera: si en P ambas celdas i y j están ocupadas por piezas entonces $tP = P$; si en una de las dos celdas es el hueco, este se intercambia con la pieza en la otra celda.

¿Es cierto que de esta manera se define una acción de G en X?