

Serie 1

- ① En $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ y $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$. Verifica que $(R, +, \cdot)$ es un anillo, indica los neutros $0_R, 1_R$, determina los divisores de cero y los elementos invertibles.
- ② Demuestra que un anillo conmutativo R es un dominio entero si y sólo si $\forall a, b, c \in R$ se tiene $(a \neq 0, ab = ac \Rightarrow b = c)$.
- ③ Demuestra que un dominio entero finito (es decir que tiene un número finito de elementos) es un campo.
- ④ Sea R un dominio entero y $a, b \in R$. Demuestra: si existen dos enteros m, n primos relativos tales que $a^m = b^m$ y $a^n = b^n$ entonces $a = b$.
- ⑤ Calcula el campo de fracciones $F(\mathbb{Q})$.
- ⑥ Sea un ideal I de un anillo R . Demuestra $1_R \in I \Rightarrow I = R$. Deduce de ello que los únicos ideales de un campo R son 0_R y R mismo y que cada homomorfismo de anillos entre dos campos (no triviales) es necesariamente inyectivo.