Algebra Moderna II, 2008-II
Michael Barot
Fecha de entrega: 14/03/2008

Serie 3

① Sea $C = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{R}$. Describe C como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, en particular determina $[C : \mathbb{Q}]$.

② Sea $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{C} \mid x \text{ es algebraico sobre } \mathbb{Q}\}$. Demuestra que cada $y \in \mathbb{C}$ que es algebraico sobre $\mathbb{A}$ pertenece a $\mathbb{A}$.

③ Demuestra que $D = \mathbb{Q}[\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}, n > 1\}]$ es algebraico sobre $\mathbb{Q}$.

④ ¿Cómo se relacionan los siguientes tres extensiones de $\mathbb{Q}$?

$$C_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \quad C_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \quad \text{y} \quad C_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{6}).$$

Describe las contenciones entre ellos y sus grados sobre $\mathbb{Q}$.

⑤ Construye un campo de descomposición de $f = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X} - 1$ sobre $\mathbb{Z}_2$ siguiendo los pasos:

(a) Demuestra que f es irreducible en $\mathbb{Z}_2[\mathrm{X}]$.

(b) Divide $f(\mathrm{Y})$ entre $\mathrm{Y} - \overline{\mathrm{X}}$ en $D[Y]$ donde $D = \mathbb{Z}_2[\mathrm{X}]/\langle f \rangle$.

(c) Averigua si $g(\mathrm{Y}) = \frac{f(\mathrm{Y})}{Y - \overline{X}}$ tiene más raíces en D: determina si es posible encontrar $\lambda, \mu \in D$ tales que $g(\mathrm{Y}) = (\mathrm{Y} - \lambda)(\mathrm{Y} - \mu)$.

(d) Indica el grado del campo de descomposición E sobre $\mathbb{Z}_2$ y una factorización de f en factores lineales en $E[\mathrm{Z}]$.