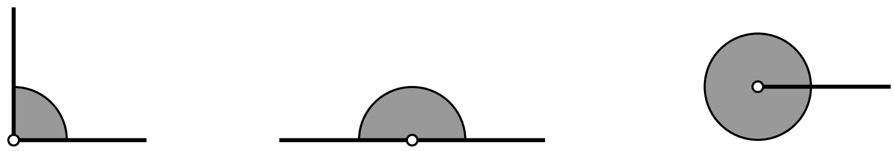
16. Angulos

La geometría que hace uso de coordenadas nace con los estudios del matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650). Pero la geometría se había desarrollado por milenios antes de él. Esta geometría libre de coordenadas se llama ahora *geometría sintética*.

La unidad de ángulos

El *ángulo* es uno de los conceptos más intuitivos de la geometría y a la vez uno de los más difícicles de definir con claridad. Aquí operaremos con un concepto intuitivo.

Denominamos:

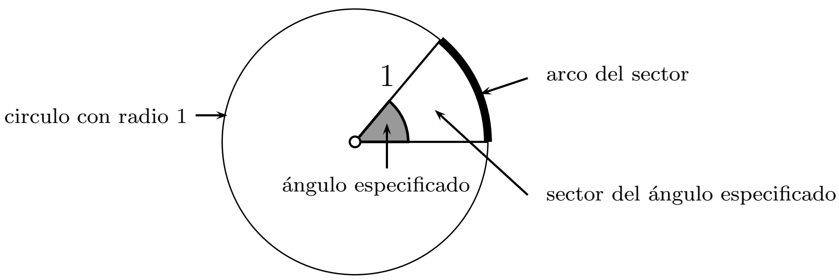


ángulo *recto* ángulo *llano* ángulo *completo*

Los ángulos se miden en una escala de *grados* o *radianes*. La siguiente tabla muestra la medida de los ángulos especiales anteriormente mencionados:

ángulo	recto	llano	completo
grados	$90°$	$180°$	$360°$
radianes	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

La unidad de los radianes es muchas veces preferido en matemáticas por varias razones. Una de ellas (y no la más importante) es que no se basa en una convención (como el de los grados, que origina en el sistema duodecimal) sino que tiene una explicación sencilla: Un ángulo - medido en radianes - es la longitud del *arco* de un sector de un círculo con radio 1.



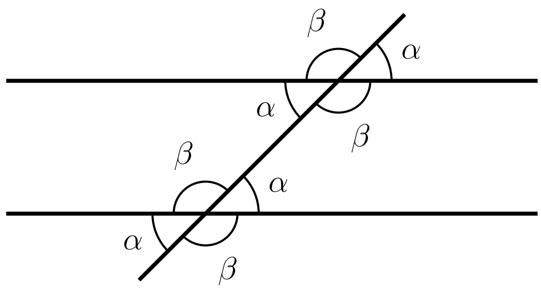
Se dice que dos ángulos son *congruentes* si miden lo mismo.

Resultados básicos

En lo que sigue veremos algunos resultados sobre ángulos que se usan todo el tiempo en argumentos geométricos.

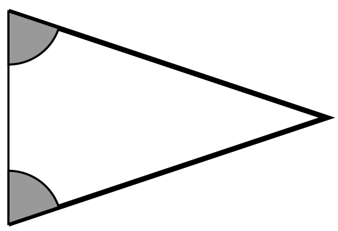
Angulos entre paralelas

Cuando dos paralelas se cortan por una tercera recta se forman ocho ángulos. Estos forman dos grupos de ángulos congruentes, que en el dibujo denominamos con α y β respectivamente.



Angulos en triángulos isóceles

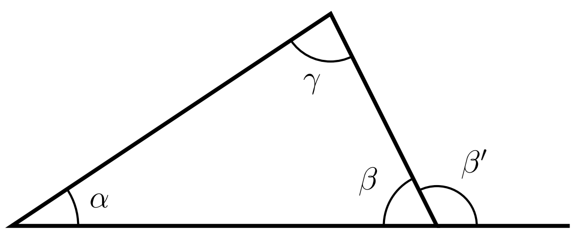
En un triángulo isóceles, los ángulos opuestos a los dos lados iguales son iguales.



También es correcto lo inverso: si en un triángulo dos ángulos son iguales entonces los lados opuestos a estos dos ángulos son iguales (y consecuentemente se trata de un trángulo isóceles).

Angulos interiores y exteriores de un triángulo

Si tenemos un triángulo entonces se forman tres ángulos *interiores*. En el siguiente dibujo, los ángulos interiores son α, β y γ. Uno de las propiedades en geometría es que la suma de los tres ángulos interiores siempre es 180°, es decir π en radianes.

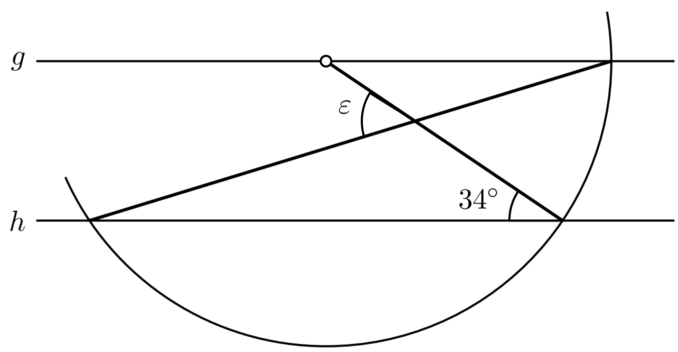


En la ilustración anterior vemos también un ángulo *exterior*. Este se forma entre la prolongación de uno de los dos lados que incide en un vértice y el otro lado que incide ahí. Se tiene que el ángulo exterior es siempre igual a la suma de los otros dos ángulos. En nuestro caso es $\beta' = \alpha + \gamma$.

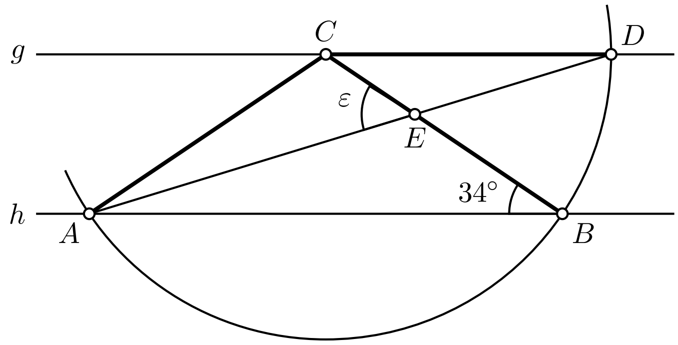
Esto no hay que memorizar. Es fácil verlo: como $\beta + \beta' = 180°$ y también $\beta + (\alpha + \gamma) = 180°$ se obtiene de inmediato que $\beta' = \alpha + \gamma$.

Algunos problemas resueltos

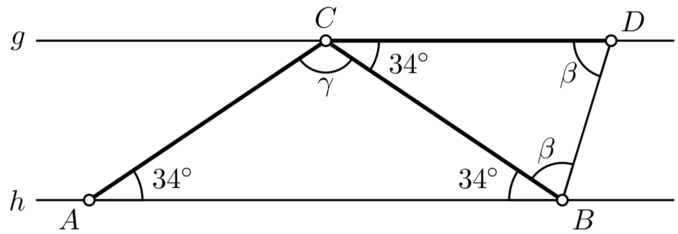
Ejemplo 1. Calcula el ángulo ε en la siguiente figura en la cual las rectas g y h son paralelas.



El arco indica que tenemos segmentos que son igual de largos. Esto apunta hacia triángulos isóceles. Por ello dibujamos estos tres segmentos y damos nombres a los puntos en el dibujo.

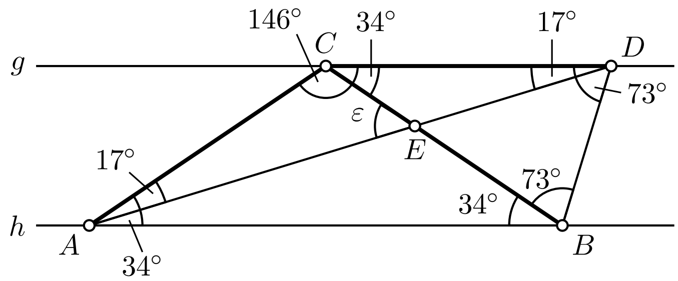


Como hay tres segmentos iguales que inciden en el punto C obtenemos tres triángulos isóceles: ΔABC, ΔBDC (falta dibujar la base BD) y ΔADC. Para tener mayor claridad olvidamos por un momento el segmento AD pero en cambio dibujamos BD.



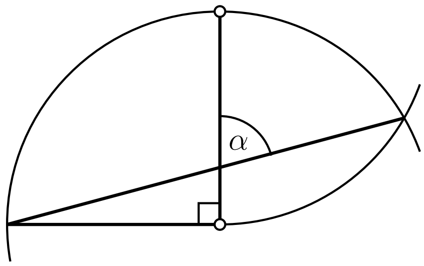
Ahora es fácil calcular varios ángulos. Dos de ellos ya marcamos en el dibujo anterior: $\sphericalangle CAB = 34°$ dado que ΔABC es isóceles y $\sphericalangle BCD = 34°$ por el resultado de ángulos en paralelas.

Como la suma en ambos triángulo es $180°$ obtenemos $\gamma = 112°$. Dado que el triángulo ΔBDC es también isóceles, debemos distribuir $180° - 34° = 146°$ en partes iguales a los otros dos ángulos. Obtenemos $\beta = 73°$. Por ello el ángulo $\sphericalangle ACD$ en C es igual a $\gamma + 34° = 146°$. Ahora podemos calcular los ángulos del tercer triángulo isóceles. Mostramos lo que encontramos hasta ahora:

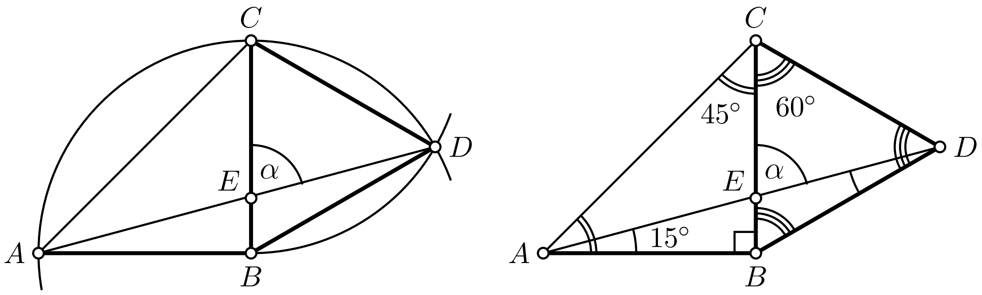


Ahora es fácil calcular el ángulo ε. Es el ángulo exterior del triángulo ΔDCE, es decir $\varepsilon = 17° + 34° = 51°$.

Ejemplo 2. Calcula el ángulo α en el siguiente dibujo.



Procedemos de manera similar que en el ejemplo anterior: primero aclaramos cuáles segmentos son iguales y cuáles triángulos isóceles resultan de ello. A parte damos nombres a los vértices. El lado izquierdo de la siguiente ilustración muestra cómo se ve la situación ahora.



Los segmentos que tienen la misma longitud se marcaron con una línea más gruesa. Vemos que los tres lados del triángulo ΔBDC tienen la misma longitud. Se trata de un triángulo equilátero. Sus tres ńgulos son entonces 60°. Por otro el triángulo ΔABC es isóceles y rectángulo. Sus ángulos son entonces 45°, 90° y 45°. Pero no debemos olvidar que hay un triángulo isóceles más: ΔABD. Como el ángulo en B es de $90° + 60° = 150°$ los otros dos ángulos quedan de 15°. Mostramos la situación del lado derecho en la ilustración anterior.

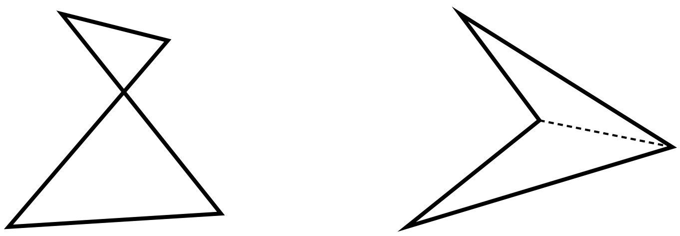
Con todo ello ya no es difícil averiguar el ángulo α. Por ejemplo podemos considerar el triángulo ΔABE. tiene ángulos 15°, 90° y $180° - 15° - 90° = 75°$. Por ello $\alpha = 75°$.

Ejercicios

① Completa la siguiente tabla.

grados	$180°$		$60°$		$1°$		$0°$
radianes	π	1.5π		$\frac{3}{4}\pi$		1	

② Consideramos polígonos sin autointersecciones (es decir en donde sólo los lados consecutivos se tocan en el vértice correspondiente). De esta manera excluimos en lo que sigue el cuadrilátero del lado izquierdo en la siguiente ilustración. En cambio, un cuadrilátero como se muestra del lado derecho no lo excluiremos.

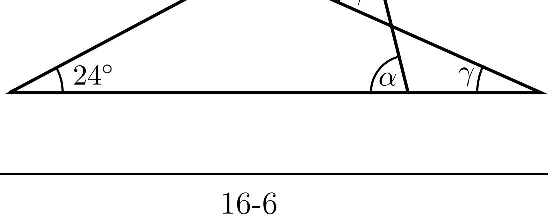


(a) ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero? Observa que la clave es que siempre se puede dividir en dos triángulos por una *diagonal* (un segmento que une dos vértices no consecutivos).

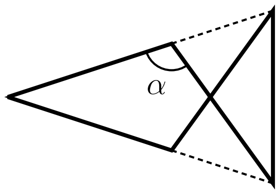
(b) ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un pentágono?

(c) ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un polígono con n lados?

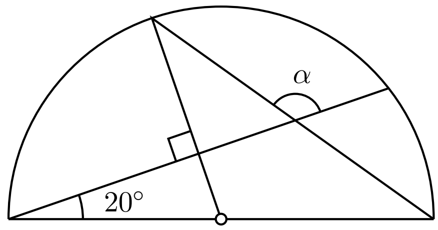
③ Calcula los ángulos α, β y γ en la siguiente figura.



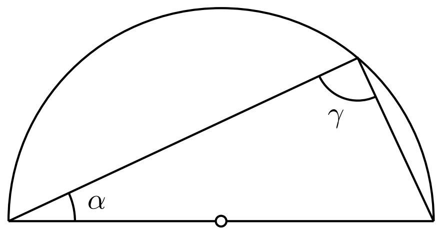
④ La siguiente figura se acomodó con 5 palillos de la misma longitud. Calcula el ángulo α.



⑤ Calcula α en la siguiente figura.



⑥ Se considera la siguiente situación, donde el ángulo α puede variar.



(a) Calcula γ si α es uno de los siguientes ángulos: $10°$, $20°$, $30°$, $40°$. Intenta también con el ángulo $\alpha = 66.4°$.

(b) A partir del inciso **(a)** formula una *conjetura* a cerca del ángulo γ.

(c) Trata de *demostrar* tu conjetura *en general*, es decir, para un ángulo α cualesquiera.