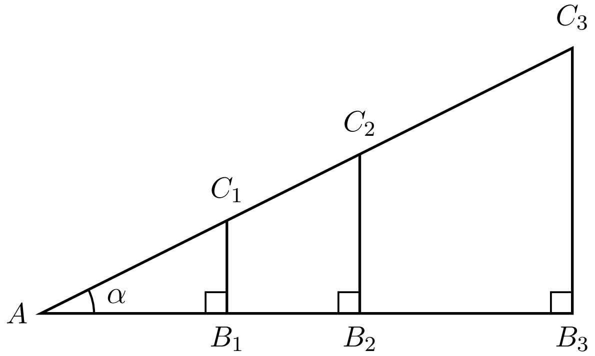
17. Trigonometría, parte I

La definición de las funciones trigonométricas

Dos triángulos rectángulos que tienen otro ángulo igual tienen los tres lados iguales. Por ello son triángulos semejantes. La siguiente ilustración muestra tres triángulos rectángulos semejantes: ΔAB_1C_1, ΔAB_2C_2 y ΔAB_3C_3.



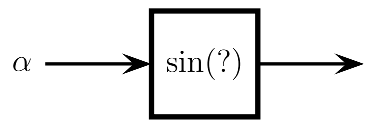
Por ello, en los tres triángulos la razón

$$\frac{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

es la misma, es decir

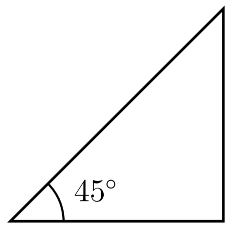
$$\frac{|B_1C_1|}{|AC_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|AC_2|} = \frac{|B_3C_3|}{|AC_3|}.$$

Esta razón sólo depende del ángulo α. Por ello podemos verlo como función en α. Esta función se llama *seno* y se denota por sin o sen.



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

Ejemplo 1. Calcula $\sin(45°)$ sin usar la calculadora.



Si el cateto opuesto mide ℓ entonces también el cateto adyacente mide ℓ. Usando el Teorema de Pitágoras podemos calcular la longitud de la hipotenusa h:

$$\begin{aligned} h^2 &= \ell^2 + \ell^2 \\ &= 2\ell^2 \end{aligned}$$

Por ello

$$h = \sqrt{2\ell^2} = \sqrt{2}\ell.$$

Ahora podemos calcular $\sin(45°)$.

$$\sin(45°) = \frac{\ell}{\sqrt{2}\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Con la calculadora podríamos evaluar $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$, pero esto no se pidió en el ejemplo.

Si en vez del cateto opuesto tomamos el cateto adyacente obtenemos la definición de la función coseno:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente de } \alpha}{\text{hipotenusa}}.$$

También podemos considerar las razones de los dos catetos. Esto da lugar a las funciones *tangente* y *cotangente*:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}, \qquad \cot(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}.$$

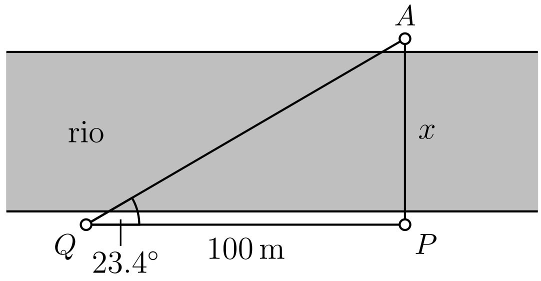
En la cuadrícula al final de este texto se dibujó la gráfica de $y = \sin(x)$. La gráfica de $y = cos(x)$ se tiene que elaborar en el Ejercicio 2.

Aplicaciones

Angulos son relitivamente fácil de medir. Por ello, la trigonometría tiene muchas aplicaciones, sobre todo en la medición de distancias. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 2. Para medir el ancho de un rio (largo y derecho) se avisa un arbol A que se encuentra en el borde opuesto. Sea P el punto de este borde más cercano al arbol (justo en frente) y Q un punto en el mismo borde a 100 m de P. El topógrafo mide un ¸ngulo de $\measuredangle AQP = 23.4°$. ¿Qué tan ancho es el rio?

Para empezar a resolver este ejercicio dibujamos primero un bosquejo en donde marcamos todo lo que sabemos y lo que hay que averiguar:



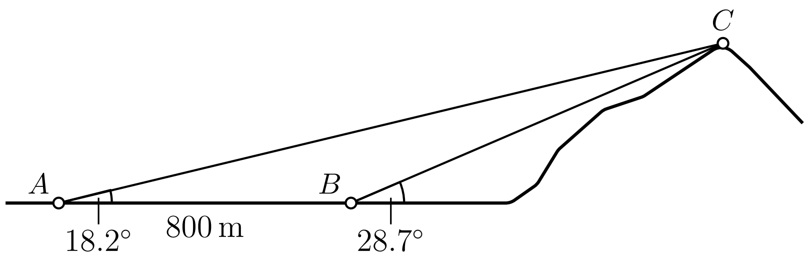
La función trigonométrica más apropiado es el tangente ya que involucra los dos catetos. Tenemos

$$\tan(23.4°) = \frac{x}{100\,\mathrm{m}}.$$

Al evaluar con la calculadora[1] nos da $\tan(23.4°) = 0.4327$. Al despejar x obtenemos $x = 43.27\,\mathrm{m}$. Por la situación tiene más sentido redondear a metros completos. El ancho del rio es de 43 metros.

Ejemplo 3. Desde un plano se avisa una montña. Desde el punto A se ve bajo un ángulo de elevación de 18.2°. Si el observador se acerca por 800 m más hacia la montaña sobre el terreno plano llega a un punto B desde el cual ésta se ve bajo un ángulo de 28.7°. Si el plano tiene una altura de 730 m sobre el nivel del mar, ¿a qué altura se encuentra la cima de la montña?

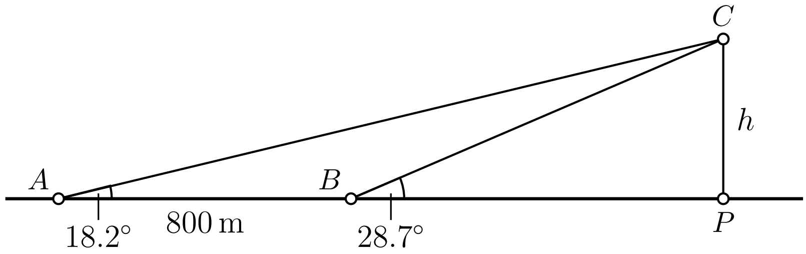
El dibujo correspondiente se ve así:



Este ejercicio es más difícil que el anterior ya que de antemano no vemos ningún triángulo rectángulo. También nos faltó colocar la incógnita x (el nivel sobre mar de la cima) en el dibujo. Pero es claro que $x = 730\,\mathrm{m} + h$ si h denota la altura de la cima sobre el nivel del plano.

Dibujando una vertical h de la cima al plano obtenemos ahora dos triángulos rectángulos:

[1] Las calculadoras pueden calcular en grados y en radianes. Es importante ajustar apropiadamanete las unidades de medida. La manera de cambiar de un sistema a otro es diferente en cada modelo pero puede consultarse en el manual de usuario.



Ya estamos un paso más cerca, pero todavía enfrentamos un problema: en ninguno de los dos triángulos rectńgulos ΔAPC y ΔBPC conocemos la hipotenusa o el cateto adyacente.

Esto se resuelve con la introducción de otra variable: $z = |BP|$. Entonces obtenemos las siguientes expresiones:

$$\tan(28.7°) = \frac{h}{z}, \qquad \tan(18.2°) = \frac{h}{800\,\mathrm{m} + z}.$$

Multiplicando con los denominadores obtenemos:

$$\tan(28.7°) \cdot z = h, \qquad \tan(18.2°) \cdot (800\,\mathrm{m} + z) = h.$$

Dado que ambos son expresiones para h podemos igualarlas y obtenemos una ecuación en la variable z:

$$\tan(28.7°) \cdot z = \tan(18.2°) \cdot (800\,\mathrm{m} + z)$$

Al evaluar las funciones tangentes obtenemos:

$$0.5475 \cdot z = 0.3288 \cdot (800\,\mathrm{m} + z).$$

Esta es una ecuación fácil de resolver. La solución es $z = 1202.68\,\mathrm{m}$. Finalmente se calcula

$$h = \tan(28.7°) \cdot z = 0.5475 \cdot 1202.68\,\mathrm{m} = 658.45\,\mathrm{m}$$

y

$$x = 730\,\mathrm{m} + 658\,\mathrm{m} = 1388\,\mathrm{m},$$

lo que es la solución buscada.

Ejercicios

① Calcula el valor de $\sin(60°)$ de manera exacta (la expresión contiene una raíz cuadrada).

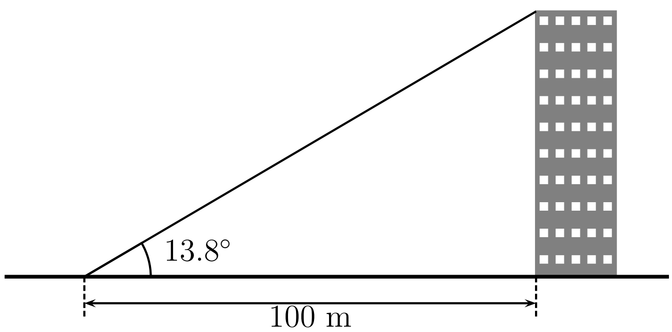
② Grafica la función $\cos(x)$ en la cuadrícula al final del texto. Usa para ello la calculadora de bolsillo y evalúa en muchos argumentos x. ¿Qué observas respecto a la gráfica $y = \sin(x)$?

③ Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de $\alpha = 20°$ y el lado opuesto mide 12 cm. Calulcula la longitud de los otros dos lados.

④ En un triángulo ABC se conocen las medidas de los ángulos $\alpha = 32°$, $\beta = 46°$ y de la altura $h_c = 7.8$ cm. Calcula la longitud de las alturas h_a y h_b.

⑤ Calcula la longitud de la bisectriz w_b y la altura h_b en el triángulo dado por los ángulos $\beta = 52°$, $\gamma = 103°$ y el lado $b = 7.1$ cm.

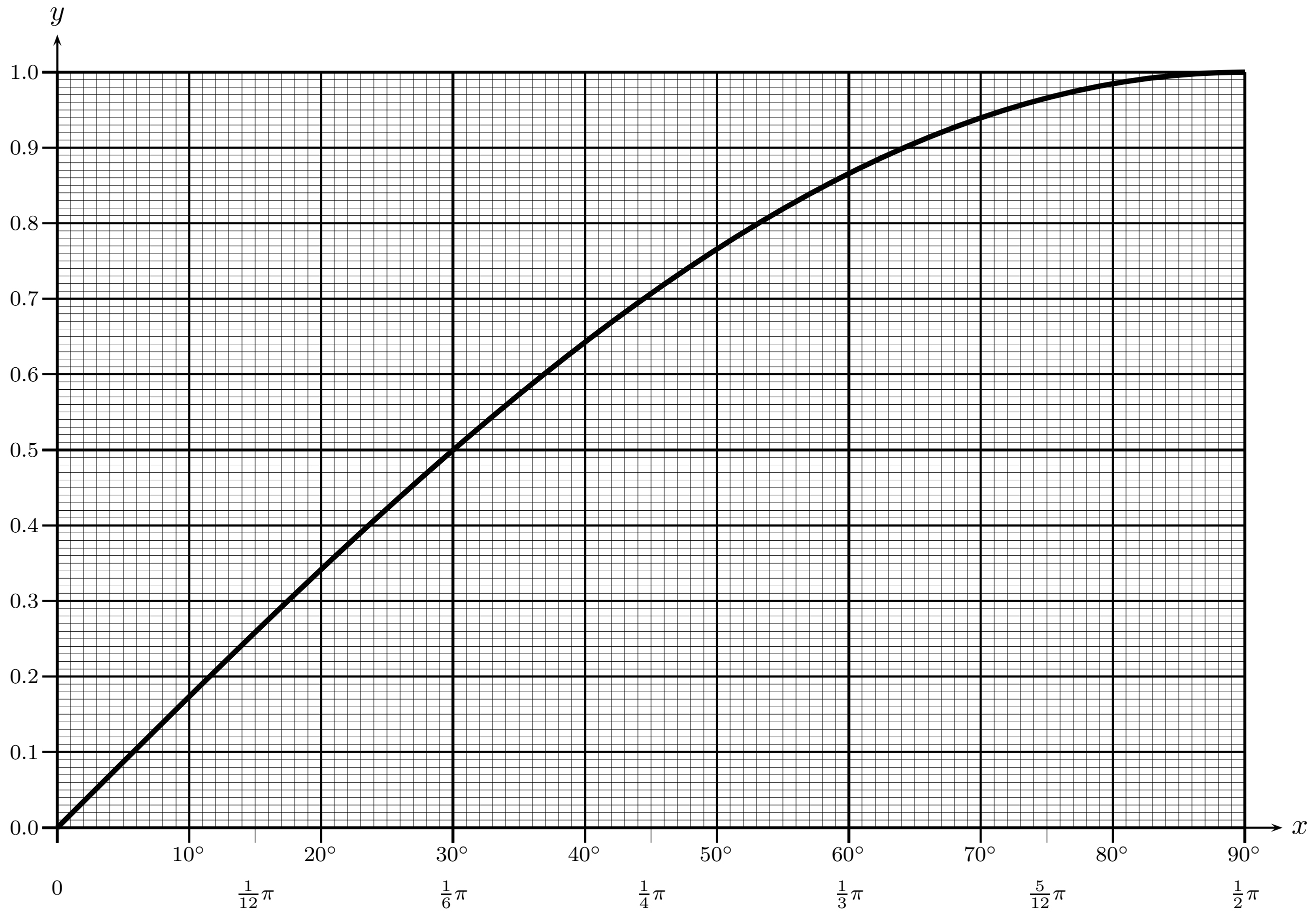
⑥ A una distancia de 100 m un edificio se ve bajo el ángulo de elevación de 13.8°.



(a) Calcula la altura del edificio.

(b) Explica por qué esta manera de medir alturas no se puede aplicar a montañas.

⑦ Desde una plataforma se visa un rio. La plataforma tiene una altura de 46.3 m. El borde más lejano del rio se ve bajo un ángulo de 14.4° (respecto a la horizontal) mientras el borde más cercano se ve bajo un ángulo de 37.7°. ¿Qué tan ancho es el rio?


y
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
x
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
0
$\frac{1}{12}\pi$
$\frac{1}{6}\pi$
$\frac{1}{4}\pi$
$\frac{1}{3}\pi$
$\frac{5}{12}\pi$
$\frac{1}{2}\pi$