18. Potencias

Leyes de potenciación

La multiplicación resulta como la repetición de la adición: $4 \cdot 3 = 3+3+3+3$. La *potenciación* resulta como la repetición de la multiplicación: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

En la expresión

$$a^n$$

el número a es la *base* mientras n es el *exponente*. El resultado, es decir a^n es la n-ésima potencia de a.

En lo que sigue veremos unas primeras leyes sencillos.

Multiplicación de potencias con la misma base

Si queremos multiplicar 3^4 con 3^2 obtenemos 3^6 ya que en la primera potencia hay 4 factores 3 y en la segunda potencia hay 2, en total 6:

$$\begin{aligned} 3^4 \cdot 3^2 &= (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 3^6 \end{aligned}$$

La ley se resume de esta manera:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Multiplicación de potencias con los mismos exponentes

Si queremos multiplicar 2^3 con 5^3 obtenemos 10^3 ya que en la primer potencia hay 3 factores 2 y en la segunda potencia hay 3 factores 5, así que hay tres factores $2 \cdot 5 = 10$:

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 5^3 &= (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) \\ &= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \\ &= 10^3 \end{aligned}$$

La ley se resume de esta manera:

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m.$$

Potenciación de potencias

Si queremos 5^3 a la cuarta potencia, obtenemos 4 factores 5^3 es decir $3 \cdot 4$ factores 5:

$$\begin{aligned}(5^3)^4 &= (5^3)\cdot(5^3)\cdot(5^3)\cdot(5^3)\\ &= (5\cdot 5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5\cdot 5)\\ &= 5^{12}\end{aligned}$$

La ley se resume de esta manera:

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}.$$

División de potencias con la misma base

Si queremos dividir 4^5 entre 4^2 obtenemos 4^3 ya que en la primera potencia hay 5 factores 4 y en la segunda potencia hay 2. Por la simplificación de fracciones quedan 3 factores:

$$\begin{aligned}\frac{4^5}{4^2} &= \frac{4\cdot 4\cdot 4\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{4}}{\cancel{4}\cdot \cancel{4}}\\ &= 4\cdot 4\cdot 4\\ &= 4^3\end{aligned}$$

La ley se resume de esta manera:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

División de potencias con los mismos exponentes

Si queremos dividir 10^3 entre 5^3 obtenemos 2^3 ya que en la primer potencia hay 3 factores 10 y en la segunda potencia hay 3 factores 5, así que hay tres factores $\frac{10}{5} = 2$:

$$\begin{aligned}\frac{10^3}{5^3} &= \frac{10\cdot 10\cdot 10}{5\cdot 5\cdot 5}\\ &= \left(\frac{10}{5}\right)\cdot\left(\frac{10}{5}\right)\cdot\left(\frac{10}{5}\right)\\ &= 2^3\end{aligned}$$

La ley se resume de esta manera:

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

Exponentes negativos

Hasta ahora en todos los ejemplos hemos usado exponentes positivos y enteros. ¿Qué significado podría tener una expresión como 4^{-2}? La respuesta correcta es: la que queremos asignarle. El significado de 4^{-2} es una *convención*, dado que no tiene sentido decir: "hay -2 factores 4".

Pero si exigimos que este las potencias con los exponentes negativo satisfacen también las leyes de la potenciación que hemos visto hasta ahora, entonces la expresión 4^{-2} sólo puede significar una cosa: $\frac{1}{16}$. El argumento es el siguiente:

$$4^{-2} = 4^{3-5} = \frac{4^3}{4^5} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{16}.$$

En general podemos formular esta ley como sigue:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

También la expresión 4^0 tiene una única interpretación: es el número 1:

$$4^0 = 4^{2-2} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}} = \frac{1}{1} = 1.$$

En general formulamos:

$$a^0 = 1.$$

Exponentes racionales

Con un argumento muy similar podemos interpretar una expresión como $3^{\frac{1}{2}}$. La única manera de hacerlo si queremos que las leyes de potenciación siguen siendo válido es que $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. El argumento es como sigue.

Sabemos que

$$3 = 3^1 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 2} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

El único número (positivo) que elevado al cuadrado de 3 es $\sqrt{3}$. De ahí que $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Por ello tiene sentido que convenimos la siguiente definición:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Más generalmente tenemos

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

En el Ejercicio ④ habrá que demostrar que las siguientes leyes se pueden ver como leyes de potencias:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \tag{18.1}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \tag{18.2}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \tag{18.3}$$

Advertencia

No hay más leyes generales para potencias. En particular, las potencias se llevan mal con la suma. Es decir, *en general* las siguientes ecuaciones **no son identidades** o dicho de otra manera: existen valores para las variables para los cuales la ecuación es **falsa**.

$$a^m + a^n = a^{m+n} \tag{18.4}$$

$$a^m + b^m = (a+b)^m \tag{18.5}$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \tag{18.6}$$

Ejercicios

① Calcula los siguientes números sin usar la calculadora.

(a) 2^4

(b) $\frac{3^5}{9 \cdot 3^2}$

(c) $\frac{4}{2^{-2}}$

(d) $1000^{\frac{2}{3}}$

② Usa las leyes de potenciación para simplificar las siguientes expresiones lo más que se puede.

(a) $a^2 \cdot a^5 \cdot a^{-6}$

(b) $\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}$

(c) $\frac{1}{(a^2)^{-\frac{1}{2}}}$

(d) $\left(y \cdot (x^3 y)^2\right)^3$

③ Simplifica los siguientes términos:

(a) $(5a^2b^2) \cdot (2ab^2c^3)$

(b) $(-2x^5)^5 \cdot (-5x^2)^2$

(c) $(3a^2b^3c^4)^7 \div (3a^2b^3c^4)^4$

(d) $6m^3n^5 \cdot 2m^2n^3 \div (-4mn^6)$

Saca la raíces:

(a) $\sqrt{36z^{10}}$

(b) $\sqrt[4]{16x^4y^{16}}$

(c) $\sqrt[3]{729x^{-6}}$

(d) $\sqrt[3]{\frac{a^5 \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}}}$

④ Muestra que las leyes (18.1), (18.2) y (18.3) se pueden interpretar como casos particulares de algunas de las leyes de potenciación.

⑤ Resuelve las siguientes ecuaciones en x:

(a) $x^4 = 2$

(b) $5^x = 125$

(c) $64^x = 16$

(d) $64^x = \frac{1}{2}$

⑥ Para cada una de las ecuaciones (18.4), (18.5) y (18.6): Encuentra números a, b, m y n de tal manera que la ecuación es falsa y encuentra otros valores para los cuales la ecuación es correcta.