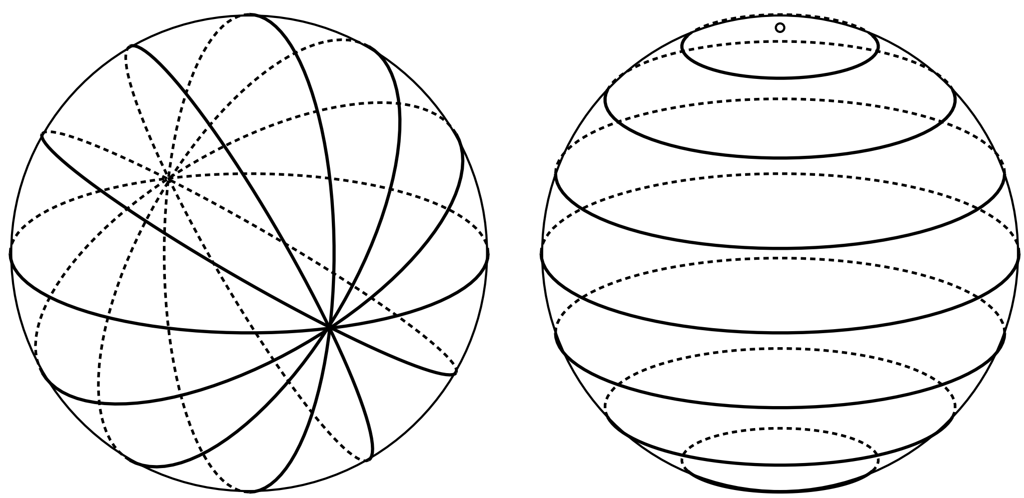
21. Círculo y recta

¿Por qué el círculo y la recta son tan importantes?

Los dos objetos geométricos más importantes –aparte del punto– son sin duda la recta y el círculo. La recta por ser *geodésica*, es decir, la curva más corta que conecta cada dos puntos de ella: si fijamos dos puntos P y Q, el segmento recto PQ es el camino más corto entre P y Q. La recta PQ es la continuación de este camino hacia ambos lados.

Geodésicas hay en cada superficie. En la esfera, las geodésicas son *círculos mayores*, es decir círculos que tienen el mismo radio que la esfera misma, o dicho de todavía de otra manera, las geodésicas son aquellos círculos que resultan al intersectar la esfera con un plano que pasa por el centro. La siguiente ilustración muestra el lado izquierdo diferentes círculos mayores que pasan por un punto y el punto *antipodal* (el punto opuesto).

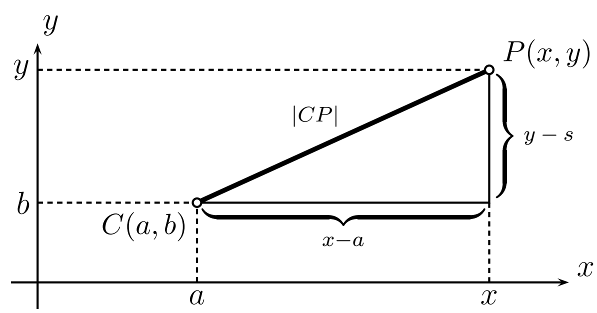


El círculo –o más correctamente– la circunferencia, es el lugar geométrico de todos los puntos que están a la misma distancia, el *radio*, de un punto dado, el *centro*. También podemos considerar circunferencias sobre superficies que no son planos. La ilustración anterior muestra del lado derecho circunferencias con el mismo centro en la esfera.

Las rectas y las circunferencias son los dos objetos fundamentales que nos dicen algo sobre la medición de las distancias en el plano (o en la superficie que queremos considerar).

La ecuación de la circunferencia

Para obtener la ecuación de una circunferencia (en el plano) consideramos un punto C con las coordenadas (a, b) y otro punto P con coordenadas (x, y).



La distancia $|CP|$ entre C y P se obtiene al usar el Teorema de Pitágoras. Según éste se tiene

$$|CP|^2 = (x - a)^2 + (y - b).$$

Si ahora fijamos la distancia $|CP| = r$ obtenemos ya la ecuación que bsucamos:

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

Recordamos (a, b) son las coordenadas del centro y r es el radio.

Ecuaciones de la recta

No hay una única ecuación de la recta sino hay varios.

La pendiente

Un concepto de suma importancia es la *pendiente* de una recta. La pendiente es un número (o infinito, si la recta es vertical). La pendiente indica qué tan inclinada es la recta. Antes de indicar cómo se calcula la pendiente de una recta indicamos algunos hechos importantes:

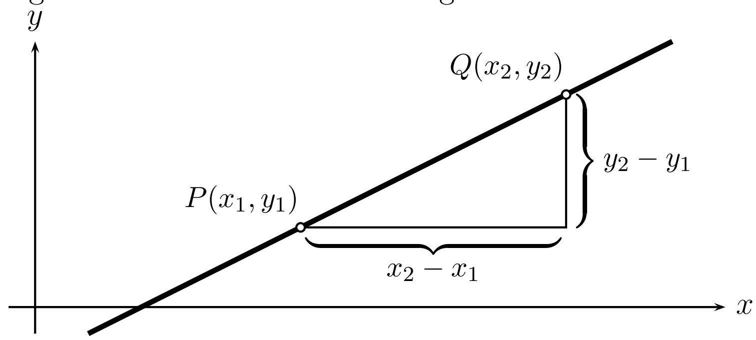
- La pendiente es *cero* para rectas *horizontales*.
- La pendiente es *positiva* para rectas que *suben* hacia la derecha.

- La pendiente es *negativa* para rectas que *bajen* hacia la derecha.

Ahora vemos cómo se calcula la pendiente. Para ello se fijan dos puntos de la recta (los que sean). Si las coordenadas de los puntos son (x_1, y_1) y (x_2, y_2) entonces la pendiente es

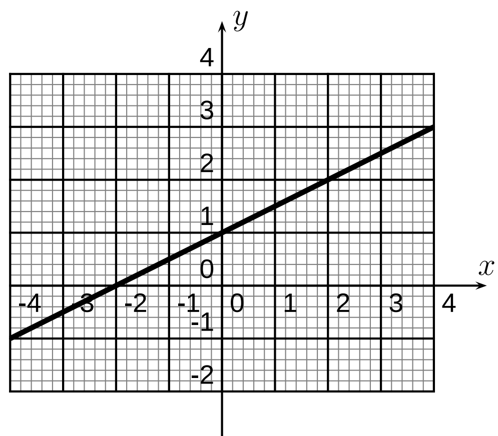
$$\text{pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

El significado geométrico se muestra en la siguiente ilustración.



Comentario: No importa cuáles puntos se eligen. Para diferentes elecciones obtenemos triángulos semejantes y por ello siempre la misma razón de los catetos, es decir, la misma pendiente.

Ejemplo 1. La siguiente gráfica muestra un ejemplo de una recta.



Es fácil encontrar las coordenadas de algunos puntos que pertenecen a esta recta: por ejemplo $(0, 1)$ y $(2, 2)$ son puntos de la recta. Por ello la pendiente es

$$\text{pendiente} = \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

Ahora vemos diferentes formas de ecuaciones para representar una ecuación.

Ecuación punto-pendiente

Si p es la pendiente de una recta y (a, b) las coordenadas de uno de sus puntos entonces para todos los puntos (x, y) de la recta se satisface

$$p = \frac{y - b}{x - a}$$

de lo que se obtiene la ecuación punto-pendiente de la recta:

$$\boxed{y - b = p(x - a)}$$

Esta será la forma preferida para nosotros. Por ello presentamos las otras formas de manera breve.

Ecuación normal de la recta

Si multiplicamos el factor del lado derecho de la ecuación "punto pendiente" obtenemos

$$\begin{aligned} y - b &= px - pa && \mid -px + pa \\ -px + y - b + pa &= 0 && \mid A = -p,\ B = 1,\ C = -b + pa \\ Ax + By + C &= 0 \end{aligned}$$

Esta última es la forma normal de la recta.

Ecuación simétrica de la recta

Podemos reescribir la ecuación aún más:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 && \mid -C \\ Ax + By &= -C && \mid \div(-C) \\ \tfrac{A}{-C}x + \tfrac{B}{-C}y &= 1 && \mid \text{reescribimos} \\ \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} &= 1 && \mid r = \tfrac{-C}{A},\ s = \tfrac{-C}{B} \\ \frac{x}{r} + \frac{y}{s} &= 1 \end{aligned}$$

La ventaja de esta forma es que r y s tienen una inmediata interpretación geometrica: la gráfica de la recta cruza el eje de coordenadas x (resp. y) en la coordenada r (resp. en s).

Ejemplo 2. La diferentes formas para representar la recta del Ejemplo 1 se ven de la siguiente manera:

$$y - 1 = \tfrac{1}{2}x \qquad | \text{ ecuación punto-pendiente}$$
$$\tfrac{1}{2}x - y + 1 = 0 \qquad | \text{ ecuación normal}$$
$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1 \qquad | \text{ ecuación simétrica}$$

Ejemplo 3. *Determina una ecuación de la recta f que pasa por los puntos $(3, 5)$ y $(4, 3)$.*

La forma más adecuada para este problema es la de punto-pendiente. La pendiente es

$$p = \frac{3-5}{4-3} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Por ello

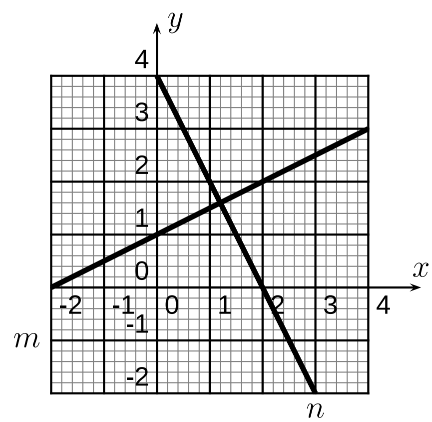
$$y - 5 = -2(x - 3)$$

es una ecuación de la recta f.

Intersección de objetos

Empezamos con un problema.

Ejemplo 4. Determina el punto de intersección de las dos rectas m y n que se muestran en la siguiente figura.



Observamos que la recta m pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene pendiente $\frac{1}{2}$ mientras la recta n pasa por el punto $(0, 4)$ y tiene pendiente $\frac{-6}{3} = -2$. Por ello tenemos las siguientes ecuaciones:

$$m: \qquad y - 1 = \frac{1}{2}x$$
$$n: \qquad y - 4 = -2x$$

Las coordenadas del punto de intersección satisfacen ambas ecuación. Despejamos una de las variables de la primera ecuación, por ejemplo y. Obtenemos $y = \frac{1}{2}x+1$. Ahora sustituimos la variable y de la segunda ecuación por $\frac{1}{2}x+1$. Así obtenemos una ecuación en una sola variable:

$$\frac{1}{2}x + 1 - 4 = -2x$$

que podemos resolver usando las herramientas del álgebra:

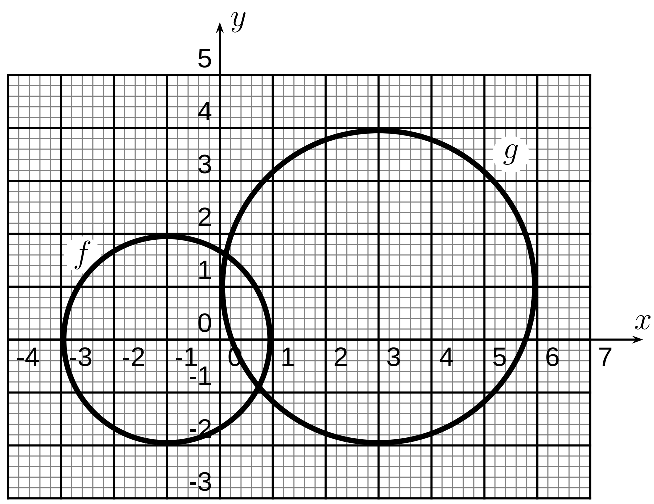
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x - 3 &= -2x && \mid +2x \\
2x + \frac{1}{2}x - 3 &= 0 && \mid +3 \text{ y simplificar} \\
\frac{5}{2}x &= 3 && \mid \cdot 2 \\
5x &= 6 && \mid \div 5 \\
x &= \frac{6}{5} = 1.2
\end{aligned}$$

De esta manera determinamos la coordenada x del punto de intersección. Para determinar la coordenada y simplemente sustituimos $x = \frac{6}{5} = 1.2$ en una de las dos ecuaciones de las rectas. Si usamos la ecuación de la recta m obtenemos $y - 1 = \frac{1}{2} \cdot 1.2 = 0.6$ y de ahí que $y = 1.6$ (podríamos usar la segunda ecuación: $y - 4 = -2 \cdot 1.2 = -2.4$ de donde se obtiene también $y = 1.6$). Las coordenadas son $(1.2, 1.6)$.

Lo importante a observar en el ejemplo anterior es que tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas que hay que resolver simultáneamente. Se dice que se trata de un **sistema de ecuaciones** de dos ecuaciones en dos variables. En el ejemplo anterior el sistema se resolvió con **el método de sustitución** que usa dos pasos:

- En una de las ecuaciones se despeja una de las variables.
- Luego se sustituye esta variable en la otra ecuación por la expresión correspondiente. Esto da una ecuación en una sola variable que se resuelve.
- Finalmente se sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones originales para determinar el valor de la segunda variable.

Ejemplo 5. Determina los puntos de intersección de las dos circunferencias f y g que se muestran en la siguiente figura.



El centro de f es $(-1, 0)$ y el radio es 2, mientras g tiene centro $(3, 1)$ y radio 3. Por ello las ecuaciones de las dos circunferencias son

$$f: \quad (x+1)^2 + y^2 = 4 \tag{21.1}$$
$$g: \quad (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9 \tag{21.2}$$

Aquí es difícil despejar una variable. Por ello primero usamos un truco. Para ello evaluamos los cuadrados en ambas ecuaciones. Obtenemos

$$f: \quad x^2 + 2x + 1 + y^2 \qquad = 4 \tag{21.3}$$
$$g: \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 9 \tag{21.4}$$

Si ahora restamos las dos ecuaciones obtenemos una nueva ecuación en la cuál ya no hay cuadrados:

$$f - g: \quad 8x - 8 + 2y - 1 = -5 \tag{21.5}$$

Si la reescribimos obtenemos

$$\begin{aligned} 8x + 2y - 9 &= -5 && \mid +9 \\ 8x + 2y &= 4 && \mid \div 2 \\ 4x + y &= 2 && \mid -4x \\ y &= -4x + 2 \end{aligned}$$

Esta es una recta en la forma estándar. De hecho es la recta que pasa por los dos puntos de intersección. Ahora podemos sustituir y en la ecuación de f por la expresión $-4x + 2$. Obtenemos:

$$\begin{aligned}
x^2 + 2x + 1 + (-4x + 2)^2 &= 4 && \mid \text{expandir} \\
x^2 + 2x + 1 + 16x^2 - 16x + 4 &= 4 && \mid \text{simplificar} \\
17x^2 - 14x + 5 &= 4 && \mid \text{-4} \\
17x^2 - 14x + 1 &= 0
\end{aligned}$$

Ahora podemos determinar los dos valores de x con la fórmula general

$$x_1 = \frac{-(-14) + \sqrt{14^2 - 4 \cdot 17 \cdot 1}}{2 \cdot 17} = \frac{14 + \sqrt{128}}{34} \approx 0.7445,$$
$$x_2 = \frac{-(-14) - \sqrt{14^2 - 4 \cdot 17 \cdot 1}}{2 \cdot 17} = \frac{14 - \sqrt{128}}{34} \approx 0.0790.$$

Los dos valores los sustituimos en la ecuación (21.5) (**y no** en la ecuación (21.1) o (21.2) ni en (21.3) o (21.4)[1]). Así obtenemos

$$y_1 = -4 \cdot 0.7445 + 2 = -0.9780$$
$$y_2 = -4 \cdot 0.0790 + 2 = 1.6840$$

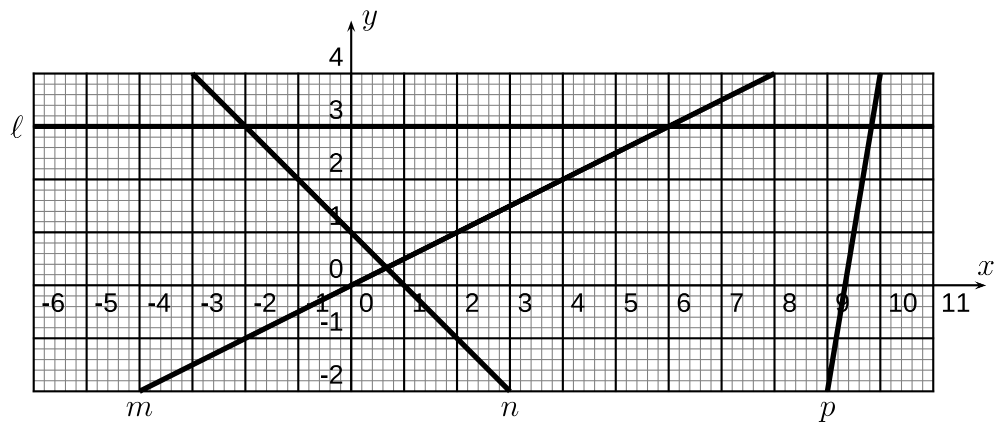
Así que los dos puntos de intersección son $(0.7445, -0.9780)$ y $(0.0790, 1.6840)$.

Lo importante a observar es que podemos tomar diferencias de dos ecuaciones y obtener una nueva ecuación. Si las coordenadas (x, y) satisfacen ambas ecuaciones iniciales entonces tambien la suma y la diferencia de ellas.

[1] Si se sustituye en una de estas ecuaciones, se obtienen otra vez dos soluciones *por cada* valor en la variable x. Después queda la tarea de eliminar las soluciones adicionales. Al sustituir en la ecuación (21.5) de la recta que pasa por los dos puntos de intersección se evita este problema.

Ejercicios

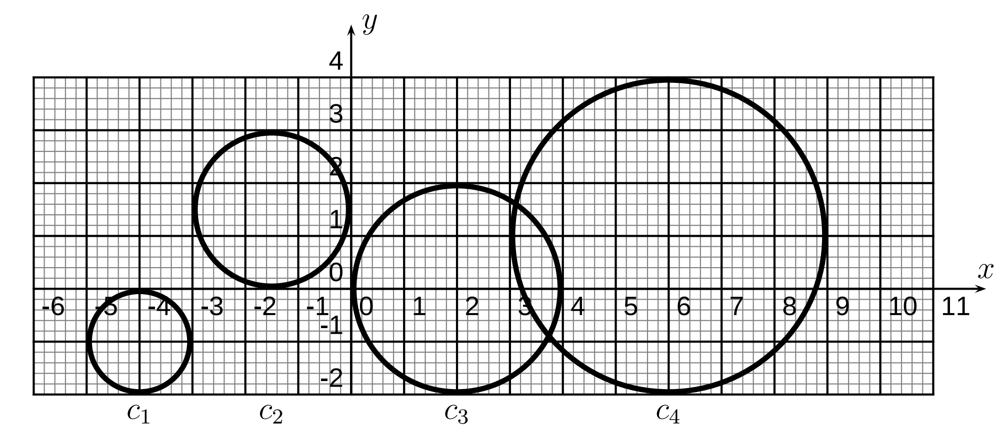
① Calcula la pendiente de cada una de las rectas ℓ, m, n y p que se muestran en la siguiente ilustración.



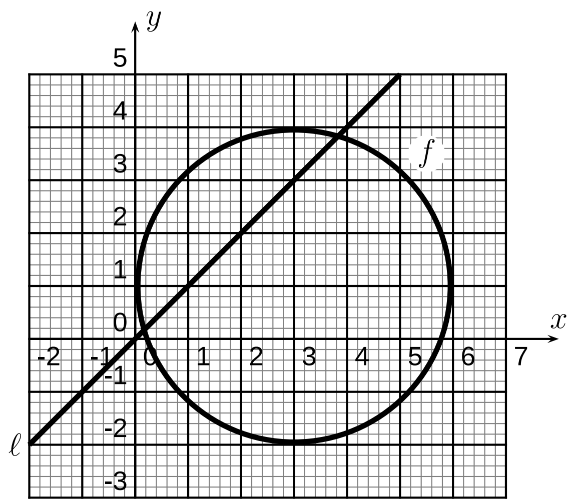
② Determina una ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, 1)$ y es paralela a la recta f del Ejemplo 2.

③ Determina una ecuación para la recta que pasa por los dos puntos $(8, 3)$ y $(-2, 5)$.

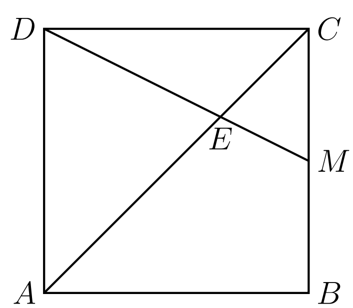
④ Determina las ecuaciones de las siguientes circunferencias:



⑤ Determina los puntos de intersección de la recta ℓ con la circunferencia f:



⑥ La siguiente figura muestra un cuadrado con lados de 10 cm. El punto M es el punto medio del lado BC. Determina la longitud AE. Pista: Elige un sistema de coordenadas a tu conveniencia. Dibuja los ejes y aclara la escala.



⑦ Determina los puntos de intersección de las dos circunferencias c_3 y c_4 del Ejercicio ④.

⑧ Si la pendiente de una recta ℓ es p, ¿cuál es la pendiente de una recta perpendicular a ℓ?