Semestre 2003/1 — Algebra Moderna I

Christof Geiss

# Tarea 2

**Ejercicio 5**
Verifica que las siguientes dos tablas de multiplicación

| $\cdot$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $c$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $e$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ | $e$ |

| $\cdot$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $e$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $e$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $e$ | $a$ | $b$ |

son tablas de multiplicacion de dos grupos no isomorfos. Demuestra que cada grupo con 4 elementos es isomorfo a uno de estos dos grupos.

**Ejercicio 6**
Para cada Grupo $G$ el subgrupo de automorfismos internos de $\mathrm{Aut}(G)$ es un subgrupo *normal*.

**Ejercicio 7**

(a) Un Grupo actua sobre un conjunto $M$. Demuestra que los grupos de isotropia de dos elementos de $M$ estan conjugados si los elementos pertencen a la misma orbita.

(b) Un grupo con 55 elementos actua sobre un conjunto con 39 elementos. Demuestra que la acción tiene un punto fijo.

**Ejercicio 8**
Sea $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\mathfrak{S}_n$ el grupo simetrico que actua sobre el conjunto potencia $\mathfrak{P}(M)$ por traslacion izquierda, i.e. para $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ y $L \subset M$ tenemos $\sigma(L) = \{\sigma(l) \mid l \in L\} \in \mathfrak{P}(M)$. Para cada $L \in \mathfrak{P}(M)$ sea $U_L \leq \mathfrak{S}_n$ el grupo de isotropia de $L$. Demuestra:

(a) Si $L \in \mathfrak{P}(M) \setminus \{\emptyset, M\}$, existen precisamente 4 elementos de $\mathfrak{P}(M)$ que permanecen fijos bajo todos los elementos de $U_L$.

(b) Los conjugados de $U_L$ tambien son grupos de isotropia.

(c) El indice de $U_L$ en su normalisador $N(U_L)$ es 1 ó 2. ¿Cuándo precisamente aparece el indice 2?

Entrega: **Lunes 2 de diciembre**, antes de la clase