Semestre 2003/1

Algebra Moderna I
Christof Geiss

Tarea 3

Ejercicio 9

(a) Sea G un grupo finito que actua sobre un conjunto finito M, y sea M la union ajena de r orbitas. Si escribimos $M_g := \{m \in M \mid g(m) = m\}$, demuestra:

$$r = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|M_g|$$

(b) Sea $M(n,k)$ el conjunto de "manteles" de tamaño $n \times n$ donde cada cuadrito tiene uno de k colores, i.e. $|M(n,k)| = k^{n^2}$. Consideramos dos manteles como equivalentes si existe una rotación que transforma uno en el otro. Usa (a) para determinar el número de clases de equivalencia.

Ejercicio 10

(a) Sea N un subgrupo normal de un grupo G, y $U \leq G$ un subgrupo con $U \cap N = \{e\}$. Si N esta contenido en el normalizador de U, entonces tambien esta contenido en el centralizador de U.

(b) Si un grupo G tiene subgrupo U de indice 2, entonces U es un subgrupo normal.

Ejercicio 11

Sean U y V subgrupos de un grupo finito G, y $UV := \{uv \mid u \in U, v \in V\}$. Demuestra:

(a) $|UV| = \frac{|U|\cdot|V|}{|U\cap V|}$.

(b) Si V es un subgrupo normal de G entonces UV es un subgrupo de G y $[UV : V]$ es un divisor de $|U|$ y de $[G : V]$. Si además el máximo comun divisor $\mathrm{mcd}(|U|, [UV : V]) = 1$, entonces $U \subset V$.

(c) Sea V un subgrupo normal de G con $\mathrm{mcd}(|V|, [G : V]) = 1$. Demuestra que en este caso $G \triangleleft H$ para algun grupo H implica $V \triangleleft H$.

Ejercicio 12
Sean U y N dos grupos y $\phi\colon U \to \mathrm{Aut}(N)$ un homomorfismo de grupos. Para elementos $(n_1, u_1), (n_2, u_2) \in N \times U$ definimos

$$(n_1, u_1) \cdot (n_2, u_2) = (n_1 \cdot \phi(u_1)(n_2), u_1 \cdot u_2)$$

Demuestra: El conjunto $N \times U$ es con esta multiplicación un grupo (que se denota $N \rtimes_\phi U$ y que se llama el *producto semidirecto* de N y U con respecto a ϕ). Ademas $N \times \{e_U\} \lhd N \rtimes_\phi U$ (subgrupo normal) y $\{e_N\} \times U < N \rtimes_\phi U$ (subgrupo),

Entrega: **Lunes 9 de diciembre**, antes de la clase