Semestre 2003/1 | Algebra Moderna I
Christof Geiss

Tarea 4

Ejercicio 13
Sean N_1, N_2 subgrupos de un grupo G, y $N_1 \times N_2$ su producto directo. El mapeo

$$N_1 \times N_2 \to G, \quad (a, b) \mapsto ab$$

define un isomorfismo de grupos si y solamente si las siguientes 3 condiciones se cumplen:
(a) el conjunto $N_1 \cup N_2$ genera G.
(b) N_1 y N_2 son subgrupos normales de G
(c) $N_1 \cap N_2 = \{e\}$
En este caso se dice que G es el *producto directo (interno)* de N_1 y N_2 y se escribe $G = N_1 \times N_2$.

Ejercicio 14
Sea U un subgrupo del grupo G. Consideramos la acción de G sobre el conjunto $M = \{gU \mid g \in G\}$ de clases izquierdos de G modulo U por traslación izquierda. Demuestra usando esta acción: Si M es finito, entonces U contiene un subgrupo normal N de G tal que G/N es finito.

Ejercicio 15
Sean U y V subgrupos de $(\mathbb{Q}, +)$, demuestra:

(a) Si $\mathbb{Q}/U$ es finito entonces $U = \mathbb{Q}$
(b) Si $\mathbb{Q}/U$ es cíclico entonces $U = \mathbb{Q}$. Pista: $U \neq \{0\}$ implica $\mathbb{N} \cap N \neq \emptyset$
(c) Si $U \neq \{0\} \neq V$ entonces $U \cap V \neq \{0\}$.
(d) $(\mathbb{Q}, +)$ no contiene subgrupos máximos.

Ejercicio 16
Para $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sea $d = \mathrm{mcd}(m.n)$ y $v := \mathrm{lcm}(m.n)$. Demuestra que los grupos $m\mathbb{Z}/v\mathbb{Z}$ y $d\mathbb{Z}/nZet$ son isomorfos.

Ejercicio 17
Demuestra:
(a) Sea G un grupo con centro Z. Entonces G/Z cíclico implica G abeliano.
(b) El grupo de automorfismos internos de un grupo no-abeliano no es cíclico.

Ejercicio 18
Sea $\mathbb{Z}_n := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

(a) Demuestra: El grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ tiene $\phi(n)$ elementos, con ϕ la función de Euler.

(b) ¿Cuáles de los grupos $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{16})$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{27})$ y $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{30})$ son cíclicos?

Ejercicio 19
Construya un grupo no-abeliano G con 27 elementos. Pista: $G = \mathbb{Z}_9 \rtimes_\psi \mathbb{Z}_3$ con $\psi\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_9)$.

Ejercicio 20
(a) Demuestra: Un grupo nunca es unión de dos subgrupos propios.
(b) Sea G un grupo abeliano finito con subgrupos propios U_1, U_2, U_3 tal que $G = U_1 \cup U_2 \cup U_3$. Demuestra: $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3$ y $[U : U_i] = 2$ para $i = 1, 2, 3$. Identifica el grupo $G/(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$.

Entrega: **Lunes 9 de enero 2003**, antes de la clase

Feliz Navidad y un Prospero Año Nuevo!