Tarea 9

Ejercicio 22
Sean $\lambda_0 = \sqrt{2}$, $\lambda_1 = \sqrt{3} + 1$ y $\lambda_2 = \sqrt{5} + 2$. Encuantra numeros racionales $q_1^{(i)}$ y $q_0^{(i)}$ tales que

$$\lambda_i^2 + q_1^{(i)}\lambda_i + q_0^{(i)} = 0$$

para $i = 0, 1, 2$

Ejercicio 23
Con los valores del ejercicio anterior sea z un número tal que

$$z^3 + \lambda_2 z^2 + \lambda_1 z + \lambda_0 = 0$$

Utilizando esta ecuacion y las ecuaciones para los λ_i del ejercicio anterior encuentra recursivamente para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ números racionales $p_{a,b,c,j}^{(k)}$ tales que

$$z^k = \sum_{a,b,c=0}^{1} \sum_{j=0}^{2} p_{a,b,c,j}^{(k)} \lambda_0^a \lambda_1^b \lambda_2^c z^j$$

es decir, para cada k hay que determinar $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ números racionales; para $k = 0, 1, 2, 3$ esto es fácil, para $k = 4, 5$ hay que usar el algoritmo de la clase. (Si se haría esto hasta $k = 24$ se podría definir un sistema homgeneo de 24 ecuaciones lineales

$$(E_{a,b,c,j}): \quad \sum_{k=0}^{24} p_{a,b,c,j}^{(k)} x_k = 0$$

con coeficientes racionales y 25 icógnitas $x_0, x_1, \ldots, x_{24}$. Este sistema tiene una solucion no trivial $(s_0, s_1, \ldots, s_{24})$ en los racionales, y $\sum_{k=0}^{24} s_k z^k = 0$.)

Ejercicio 24
Sean a y b números reales. Demuestra que existen números reales x, y tales que $(x + yi)^2 = a + bi$. Aqui i denota la unidad imaginaria de los números complejos. Concluya, que en los números complejos la ecuación $z^2 = c$ tiene para cualquier número complejo c una solución.