Algebra Lineal I
Titular: Christof Geiss
Ayudante: Francisco Barrios

Tarea 2

Ejercicio 1
Sea $\mathbb{F}$ un campo. Demuestra las siguientes afirmaciones, usando solamente las axiomas de un campo:

(a) (para los matemáticos): Con $\mathbb{F}^* := \mathbb{F} \setminus \{0\}$ tenemos que $(\mathbb{F}^*, \cdot)$ es un grupo abeliano.

(b) En $\mathbb{F}$ los elementos 0 y 1 son únicos. Dado $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$ tambien los elementos $-\lambda$ y λ^{-1} son únicos.

(c) Para $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\mathbb{F}^n$ tiene un estructura natural de espacio vectorial.

Ejercicio 2
Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. Si $U \subset V$ es un subespacio (i.e. U es cerado bajo la adición y multiplicación) entonces es un espacio vectorial. Pista: Puedes utilizar las “formulas” $0 \cdot x = 0$ y $(-1) \cdot x = -x$ que demostramos en la clase.

Ejercicio 3
Considera el subespacio

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ y } 2x_2 - x_4 = 0\}$$

de $\mathbb{R}^4$. Encuentra una base de U y completa esta base a una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 4
Sea p un primo y $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ el campo con p elementos. Demuestra que el espacio vectorial $\mathbb{F}_p^3$ tiene precisamente $p^2 + p + 1$ subespacios diferentes de dimensión 2.