Semestre 2006/1 | Algebra Lineal I
Titular: Christof Geiss
Ayudante: Francisco Barrios

Tarea 3

Ejercicio 1
Sea V un espacio vectorial sobre los reales y $a, b, c, d \in V$. Ademas consideramos

$$\begin{array}{rrrrr} v_1 := & a+ & b+ & c+ & d \\ v_2 := & 2a+ & 2b+ & c- & d \\ v_3 := & a+ & b+ & 3c- & d \\ v_4 := & a- & b+ & c- & d \\ v_5 := & - & b+ & c- & d \end{array}$$

Demuestra que $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ no es linealmente independiente.

Ejercicio 2
Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y U_1, U_2 subespacios de V. Se dice que U_1 y U_2 son subespacios compelmentarios si $U_1 + U_2 = V$ y $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
Demuestra que si V es un especio vectorial de dimension n y U_1 un subespacio de dimension p de V, entonces existe un subespacio U_2 de V complementario a U_1 y que cada subespacio U_2 con esta propiedad tiene dimension $n - p$.

Ejercicio 3
Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subespacios de V. Demuesatra que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(i) Para cada $v \in V$ existen vectores únicos $u_i \in U_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ tal que $v = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

(ii) $V = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ y

$$U_i \cap (U_1 + \cdots U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_n = \{0\} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Ademas, en esta situacion vale $\dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim U_i$ si V es de dimension finita.

Ejercicio 4
Sea V un espacio vectorial sobre los complejos $\mathbb{C}$. Podemos considerar V tambien como espacio vectorial sobre los reales al restringir la multiplicación

$\mathbb{C} \times V \to V$ a $\mathbb{R} \times V \to V$. Como en las dos sitaciones los conceptos de dimension y envolvente lineal son diferentes, introducimos las notaciones $\dim_{\mathbb{R}}$, $\dim_{\mathbb{C}}$ y $L_{\mathbb{R}}$, $L_{\mathbb{R}}$ para ello. Determina en el caso $V = \mathbb{C}^3$ todas las parejas (r, c) de naturales tales que existen $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^3$ tales que $r = \dim_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3)$ y $c = \dim_{\mathbb{C}} L_{\mathbb{C}}(v_1, v_2, v_3)$.