Semestre 2006/1

Algebra Lineal I
Titular: Christof Geiss
Ayudante: Francisco Barrios

Tarea 4

Ejercicio 1
Sea p un primo y $\mathbb{F}$ el campo $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ con p elementos. Demuestra que $\mathbb{F}^5$ tiene precisamente

$$p^6 + p^5 + 2p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p + 1$$

subespacios de dimension 3.

Ejercicio 2
Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, y $U \subset V$ un subconjunto. Consideramos las siguientes condiciones a U.

(i) $U \neq \emptyset$

(i') $0 \in U$

(ii) $u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$

(iii) $\lambda \in \mathbb{F}$ y $u \in U \to \lambda u \in U$.

Demuestra: Para U los siguientes dos juegos de condiciones son equivalentes: {(i), (ii), (iii)} y {(i'), (ii), (iii)}. Ademas demuestra que en este caso U es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

Ejercicio 3
Considera los siguientes vectores en $\mathbb{R}^4$: $w_1 := (1, 1, 1, 1)$, $w_2 := (0, -1, -1, 0)$, $w_3 := (1, -1, 0, 0)$, $w_4 := (0, 1, 0, 1)$, $w_5 := (1, 2, 3, 4)$, $w_6 := (\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5})$ y determina $\dim L(w_1, \ldots, w_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Ejercicio 4
Sea $f \colon V \to W$ un homomorfismo entre espacios vecvtoriales sobre un campo $\mathbb{F}$. Demuestra:

(a) f es inyectivo si y solamente si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

(b) Si $(v_1, \ldots, v_n)$ es una base de V entonces V es inyectivo si y solamente si $(f(v_1), \ldots f(v_n))$ es linealmente independiente en W.