ÁLGEBRA SUPERIOR II
ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS NATURALES

TITULAR: DR. CHRISTOF GEISS.
AYUDANTE: FRANCISCO BARRIOS

Abstract. En esta nota estudiamos someramente al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Definición. Los números naturales están formados por un *conjunto* $\mathbb{N}$ que contiene un elemento distinguido 0 —llamado el cero— junto con una *función sucesor* $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la cual satisface los siguientes axiomas:

(1) S es inyectiva.
(2) $0 \notin S(\mathbb{N})$, y
(3) Si $M \subseteq \mathbb{N}$ es un subconjunto que contiene al cero y satisface $S(M) \subseteq M$ entonces $M = \mathbb{N}$.

La función sucesor refleja de algún modo lo que es el proceso de conteo como sigue:

(1) El axioma (1) equivale a que $[a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)]$; es decir, uno nunca encuentra el mismo número dos veces.
(2) El axioma (2) equivale a decir que 0 es el principio del proceso de conteo. (algunos matemaáticos prefieren comenzar con el 1).
(3) El axioma (3) equivale al **Principio de Inducción Completa (PIC)**:
   Si una propiedad P se aplica al cero *(base inductiva)* y si para todo n que posee la propiedad P su sucesor $S(n)$ también la posee *(paso inductivo)* entonces esta propiedad la poseen *todos* los naturales.

Y ese es el contenido de nuestro primer

Teorema. *El Principio de Inducción Completa $\Longleftrightarrow$ el axioma (3).*

Demostración:
Necesidad: Supongamos válido el PIC. Queremos probar que si $M \subseteq \mathbb{N}$ con $0 \in M$ y tal que $S(M) \subseteq M$ *entonces* $M = \mathbb{N}$. Para ello defínase la propiedad P como "x está en M". Tenemos de esta manera que 0 satisface P y que si x satisface P entonces $S(x)$ *también* satisface P (pues por hipótesis tenemos que $S(M) \subseteq M$). Por el PIC, la propiedad $P :=$ "$x \in M$" la poseen todos los naturales; es decir $\mathbb{N} \subseteq M \Longrightarrow \mathbb{N} = M$.
Suficiencia: Supongamos válido el axioma (3) y sea Q una propiedad que se aplica al cero y que para toda n que cumple Q, el sucesor $S(n)$ también cumple Q. Deseamos probar que *todos* los naturales satisfacen dicha propiedad. Para ello considérese el conjunto $M := \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \text{ cumple } Q \,\}$. Vemos inmediatamente que $0 \in M$ y que si $x \in M$ entonces $S(x) \in M$. Por el axioma (3) $M = \mathbb{N}$, es decir, todo número natural cumple Q. □

Date: March 7, 2005.

Necesitamos ahora una

Definición. Un conjunto M se dice que es *infinito* si existe una función inyectiva $f : M \to M$ tal que $f(M) \neq M$.

Ejemplo. Los naturales son un conjunto infinito: Considérese $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $n \mapsto n+1$.

Los enteros también son un conjunto infinito: Basta tomar en cuenta $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donde $a \mapsto 2a$.

Podemos abordar ahora nuestro siguiente

Teorema. *Existe un conjunto infinito* $\iff$ *Existe un conjunto* $\mathbb{N}$ *que satisface los axiomas* (1) *a* (3).

Demostración:
Suficiencia: Supongamos que existe $\mathbb{N}$ y que éste cumple con (1), (2) y (3). Si hacemos $f := S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tenemos que:

(1) f es inyectiva (por (1)).
(2) $f(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$ pues por (2) $0 \notin f(\mathbb{N})$.

Es decir $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.
Necesidad: Sea A un conjunto infinito. Como $f(A) \neq A$ debe existir un elemento (llamémoslo cero y denotémoslo por 0) que está en A y que *no* está en $f(A)$. Sea I la *clase* de todos los conjuntos $M \subseteq A$ tales que $0 \in M,\ f(M) \subseteq M$. Por lo anterior $I \neq \emptyset$ (pues A pertenece a dicha clase y todo conjunto es subconjunto de sí mismo); entonces tomando la intersección $\bigcap_{M \in I} M$ obtenemos un conjunto que contiene un elemento distinguido 0 y que definiendo $S := f|_M$ satisface:

(1) La restricción a un subconjunto del dominio de una función inyectiva sigue siendo inyectiva; i.e. se cumple (1). Adicionalmente como $0 \notin f(A)$ se tiene que $0 \notin f(M)$ para toda $M \in I$.
(2) Como siempre se cumple que $f|_M(\bigcap_{M \in I}) \subseteq \bigcap_{M \in I} f|_M(M) = \bigcap_{M \in I} f(M)$ y este último conjunto *no* contiene al cero, entonces ningún subconjunto de él puede contenerlo; i.e. se cumple (2).
(3) Sea $H \subseteq \bigcap_{M \in I} M$ un subconjunto que contiene al cero y que cumple que $f(H) \subseteq H$; entonces H es un elemento de I y aparece como uno de los intersecandos. Como la intersección está contenida en cada uno de estos se tiene que: $\bigcap_{M \in I} M \subseteq H \Longrightarrow \bigcap_{M \in I} M = H$.

$\square$

Sin embargo la construcción de la prueba anterior depende de las elecciones de A, f y 0. Para remediar esto y poder hablar *del* conjunto de los números naturales necesitamos del **Teorema de Recursión de Dedekind**, pero esa es otra historia.