ÁLGEBRA SUPERIOR II
ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS NATURALES

TITULAR: DR. CHRISTOF GEISS.
AYUDANTE: FRANCISCO BARRIOS

Abstract. Después de haber demostrado que la existencia de un conjunto infinito y la existencia de un conjunto $\mathbb{N}$ que cumple ciertos axiomas son problemas equivalentes, abordamos el problema de la *unicidad* de los números naturales.

Muchos de los conceptos que se introducen en $\mathbb{N}$ se dan de manera *recursiva*. Por ejemplo, podríamos definir la *adición* de números naturales como sigue:

$$\begin{aligned} m+0 &:= m \\ m+1 &:= S(m) \\ m+2 &:= S(m+1) \end{aligned}$$

y en general $m+S(n) := S(m+n)$. La justificación teórica de que este procedimiento recursivo constituye una definición está dada por el siguiente resultado:

Teorema (Recursión de Dedekind). *Si A es un conjunto que contiene por lo menos un elemento $a \in A$ y $g : A \to A$ es una función de A en sí mismo, entonces existe una* única *función $\varphi : \mathbb{N} \to A$ que satisface las dos propiedades siguientes:*

(1) $\varphi(0) = a$.
(2) $\varphi \circ S = g \circ \varphi$.

La función φ se dice que está definida *recursivamente* a partir de $\varphi(0) = a$ con *fórmula de recursión* $\varphi(n+1) = g(\varphi(n))$.
Demostración:
Supongamos que dicha función *existe* y procedamos a demostrar primero su *unicidad*: Para ello sean $\varphi_1,\ \varphi_2$ dos funciones de $\mathbb{N}$ a A que satisfacen (1) y (2), demostraremos haciendo inducción sobre n que $\varphi_1(n) = \varphi_2(n)$ para toda n. La *base inductiva* nos la da (1) pues $\varphi_1(0) = a = \varphi_2(0)$ y nuestra *hipótesis de inducción* estipula que para toda $k > 0$ se cumple que $\varphi_1(k) = \varphi_2(k)$. Es por (2) que vemos que se cumple el *paso inductivo*:

$$\varphi_1(k+1) = \varphi_1(S(k)) = g(\varphi_1(k)) = g(\varphi_2(k)) = \varphi_2(S(k)) = \varphi_2(k+1)$$

Para demostrar la *existencia* de dicha φ considérense *todos* los subconjuntos $H \subseteq \mathbb{N} \times A$ que cumplen las dos propiedades dadas a continuación:

(1) La pareja ordenada $(0, a) \in H$, y
(2) Para todas $n,\ b$; si se cumple que $(n,\ b) \in H$ entonces $(S(n),\ g(b)) \in H$.

Como todo el conjunto $\mathbb{N} \times A$ es uno de los mencionados subconjuntos H y todos los H contienen al elemento $(0,\ a)$, entonces la intersección de todos ellos —llamémosla D— es no vacía y es además el subconjunto más *pequeño* de $\mathbb{N} \times A$ que satisface (1)

Date: March 7, 2005.

y (2) en el sentido de que para cualquier otro subconjunto $G \subseteq \mathbb{N} \times A$ que satisfaga *ambas* propiedades se tiene que $D \subseteq G$ (¿por qué?). Afirmamos que el subconjunto D es la *gráfica* de una función $\varphi : \mathbb{N} \to A$ y probaremos esta afirmación utilizando el PIC con la siguiente propiedad:

(*) A cada $n \in \mathbb{N}$ corresponde una y sola una $b \in A$ tal que $(n,\ b) \in D$.

Para comenzar la inducción nótese que por (1): $(0, a) \in D$. Si existiese $(0, c) \in D$ tal que $c \neq a$ entonces uno podría quitar $(0, c)$ de D y obtener así un conjunto $D - \{(0, c)\}$ que todavía satisface (1) y (2); pero esto *contradiría* el que D *es* el más pequeño de los subconjuntos de $\mathbb{N} \times A$ con esta propiedad.

Completamos la inducción argumentando como sigue: Supóngase que para $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > 0$ existe una única $b \in A$ tal que $(k,\ b) \in D$. Por (2) tenemos que $(S(k),\ g(b)) \in D$. Si tuviésemos $(S(k),\ c) \in D$ con $c \neq g(b)$, podríamos remover a $(S(k),\ c)$ de D y llegar a una contradicción por el mismo razonamiento utilizado en el párrafo anterior. De esta manera terminamos la inducción y establecemos la validez de (*) *para todos los naturales*. En consecuencia podemos escribir a D como la gráfica de una función $\varphi : \mathbb{N} \to A$ como sigue:

$$D = \{\ (n,\ \varphi(n)) \mid n \in \mathbb{N}\ \}$$

La propiedad (1) significa que $\varphi(0) = a$ y la (2) que $(S(n),\ g(\varphi(n))) \in D$ por lo que concluimos que $\varphi \circ S(n) = g \circ \varphi(n)$ para toda n. □

Ejemplo. La n-ésima potencia natural c^n de un número real c se define recursivamente mediante $c^{n+1} = c^n \cdot c$ comenzando con $c^0 = 1$. Aquí hemos aplicado el Teorema de Recursión con $A := \mathbb{R},\ a = 1$ y $g(b) := b \cdot c$.

A continuación demostraremos la unicidad de $\mathbb{N}$.

Teorema (Unicidad de los números naturales). *Sea $\mathbb{N}'$ un conjunto con una función sucesor S', un elemento distinguido $0'$ y que satisface los axiomas (1) a (3) contenidos en la nota anterior; entonces $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}'$ son* canónicamente[1] *isomorfos; es decir, existe sólo una función biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ que satisface $\varphi(0) = 0'$ y que $S' \circ \varphi = \varphi \circ S$.*

Demostración:
Hágase $A := \mathbb{N}',\ a := 0'$ y $g := S'$ y aplíquese el Teorema de Recursión: Por lo tanto existe una *única* función $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ con $\varphi(0) = 0'$ y $\varphi \circ S = S' \circ \varphi$. Intercambiando los papeles de $\mathbb{N}$ y de $\mathbb{N}'$ obtenemos una *única* función $\psi : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}$ que satisface $\psi(0') = 0$ y $\psi \circ S' = S \circ \psi$. Para probar que $\psi \circ \varphi = 1_{\mathbb{N}}$ (la función identidad en $\mathbb{N}$) obsérvese que tanto $\psi \circ \varphi$ como $1_{\mathbb{N}}$ son funciones $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satifacen $\Phi(0) = 0$ y que $\Phi \circ S = S \circ \Phi$. Por la *unicidad* de la que habla el Teorema de Recursión sólo que ahora aplicado a $A := \mathbb{N},\ a = 0$ y $g := S$ tenemos que $\psi \circ \varphi$ y $1_{\mathbb{N}}$ deben ser *iguales*. Análogamente se prueba que $\varphi \circ \psi = 1_{\mathbb{N}'}$; i.e. $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}'$ son isomorfos. □

[1] Del lat. canonicus, regular, conforme a las reglas. Regla: 5. f. En las ciencias o artes, precepto, principio o máxima. (Diccionario de la Real Academia Española 22^a edición, 2001).